

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 7.XII.2019

1. Dire se le serie seguenti sono convergenti e in caso affermativo calcolarne la somma

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^{2n}} \\ \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{e^{3n}} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} & \text{(g)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n}}{5^n} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 4}{3^n}. \end{array}$$

2. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$.

3. Dire se le serie seguenti sono convergenti

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \cos \left(\frac{1}{n}\right)} \\ \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n^2}{n^3 + n - 1} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}} & \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n-1} \\ \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} & \text{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} & \text{(l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{2^n + 6^n} \\ \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & \text{(n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} & \text{(o)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \\ \text{(p)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2} & \text{(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 10\sqrt{n} + 50} & \text{(r)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}. \end{array}$$

4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, la convergenza delle serie seguenti

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\alpha} & \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\ln^{\alpha} n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right) \\
 \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2 + \ln n}{n^{\alpha} \ln(n+1)}} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 - e^{\frac{1}{2n}} - \cos \left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right] & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1 + n^{\alpha}} \\
 \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \alpha^n}{(2n)^n} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} + n^{2-\alpha}} \\
 \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1 + n^{\alpha} + n^3}{n^3} \right) & \text{(m)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{4n^6 + n^{\alpha}} - 2n^3 \right) & \text{(n)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4 + n^{2\alpha}}{n^{\alpha+3}} \\
 \text{(o)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - 1} \right)^n & \text{(p)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^{5-\alpha}} \right) & \text{(q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n^2} - 1 \right)^{\alpha}.
 \end{array}$$

5. Si ponga, per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\ln(1+n)}, \quad b_n = \frac{1}{\ln(1+n)} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

- (a) Mostrare che a_n e b_n sono entrambe positive.
- (b) Mostrare che a_n , b_n sono asintotiche tra loro e che tendono entrambe a zero per $n \rightarrow +\infty$.
- (c) Mostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ diverge a $+\infty$.
- (d) Dire perché non si può applicare alle due serie del punto (c) il criterio del confronto asintotico.
- (e) Dire perché, nonostante la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ abbia i termini di segno alterno e infinitesimi, non si può applicare il criterio di Leibniz.

Vedere anche ad es. il cap. 6 del **primo** volume, parte seconda di Marcellini-Sbordone.