

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 13.XII.2017

1. Nel caso (a), f_n converge a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Poiché le f_n sono continue mentre f è discontinua, la convergenza non può essere uniforme. Questo si vede anche dalla definizione, si trova infatti che

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x > 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sulle semirette del tipo $(-\infty, -a]$ o $[a, +\infty)$, con $a > 0$. Si ha infatti

$$\sup_{[a, \infty)} |f_n - f| = |f_n(a) - f(a)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(na) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Nel caso (b), $f_n(x)$ converge a $f(x) \equiv 1$. La convergenza non è uniforme, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} = 1, \quad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sugli intervalli del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$, perché

$$\sup_{[-a, a]} |f_n - f| = 1 - e^{-\frac{a^2}{n}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Nel caso (c), $f_n(x)$ converge a $f(x) \equiv 0$. La convergenza non è uniforme, in quanto

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} f_n(x) = f_n(-n) = 1, \quad \forall n.$$

La convergenza è invece uniforme sulle semirette del tipo $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. Infatti, per n abbastanza grande ($n > -a$) allora f_n è decrescente su $[a, +\infty)$ e quindi

$$\sup_{[a, +\infty)} |f_n - f| = \sup_{[a, +\infty)} f_n = f_n(a) = \frac{1}{(a+n)^2 + 1} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

2. Nel caso (a), $f_n(x)$ converge a $f(x) = |x|$ e si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{\mathbb{R}} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \sup_{x \geq 0} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

quindi la convergenza è uniforme, ma la funzione limite non è derivabile per $x = 0$.

Nel caso (b), $|f_n(x)| \leq 1/n$ per ogni x quindi f_n converge a $f(x) \equiv 0$ uniformemente. D'altra parte $f'_n(x) = \cos nx$ che in generale non ha limite per $n \rightarrow \infty$.

Nel caso (c), $f_n(x)$ converge a $f(x) \equiv 0$ e si ha

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = \sup_{x \geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2\sqrt{e}} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

quindi la convergenza è uniforme. D'altra parte, si verifica che $f'_n(x) \rightarrow 0$ se $x \neq 0$, ma $f'_n(0) = 1$ per ogni n , quindi non converge a $f'(0) = 0$.

3. (a) La successione converge puntualmente a $f(x) \equiv 0$ se $\alpha < 4$, mentre per $\alpha = 4$ converge a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x > 0. \end{cases}$$

Se $\alpha > 4$, la successione non ha un limite puntuale finito.

- (b) Si ha

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^{\alpha-2}}{2} \arctan n^2 \rightarrow \begin{cases} 0, & \alpha < 2 \\ \frac{\pi}{4}, & \alpha = 2 \\ +\infty, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Quindi il limite coincide con l'integrale di f se $\alpha < 2$ (sono entrambi zero) e se $\alpha = 4$ (sono entrambi infiniti).

- (c) Se $\alpha = 4$ il limite puntuale è una funzione illimitata, mentre le f_n sono limitate. Quindi $\sup |f_n - f| = +\infty$ per ogni n e la convergenza non è uniforme. Se $\alpha < 4$ si ha

$$\sup_{[0, +\infty)} |f_n - f| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3n}}\right) = \frac{3^{3/4}}{4} n^{\alpha-1},$$

quindi il limite è uniforme se e solo se $\alpha < 1$.

- (d) Se $\alpha = 4$, si ha

$$\sup_{[1, +\infty)} |f_n - f| = \sup_{[1, +\infty)} \frac{1}{x^3(1 + n^4 x^4)} = \frac{1}{1 + n^4} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

quindi la convergenza è uniforme. Se $\alpha < 4$, la funzione f_n è decrescente su $[1, \infty)$ per n abbastanza grande e pertanto

$$\sup_{[1, +\infty)} |f_n - f| = \sup_{[1, +\infty)} f_n = f_n(1) = \frac{n^\alpha}{1 + n^4} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

quindi la convergenza è uniforme anche in questi casi.

4. Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato qualunque (escludendo il caso banale $x = 0$). Scrivendo lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$ con resto di Lagrange, si ottiene

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \sin \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

dove ξ è un opportuno valore compreso tra 0 e x . Ne segue che

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty,$$

cioè la serie data converge a $\sin x$.

5. (a) per $x \in [5, 9)$, (b) per $x \in [0, 1)$, (c) per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.
6. Diamo il valore del raggio di convergenza R e il criterio suggerito a seconda dei casi:
- (a) $R = e^{-3}$, criterio del rapporto,
 - (b) $R = 2$, criterio della radice,
 - (c) $R = e/4$, criterio del rapporto,
 - (d) $R = 4/3$, criterio del rapporto,
 - (e) $R = 1/2$, criterio della radice,
 - (f) $R = +\infty$, criterio della radice.
7. Le verifiche sull'ortogonalità seguono immediatamente dalla definizione. Le norme richieste valgono rispettivamente $\|f\| = \sqrt{2\pi}$, $\|g\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{3/2}$, $\|h\| = \sqrt{\frac{2}{5}}\pi^{5/2}$. Il polinomio $p(x)$ con le proprietà richieste è $p(x) = 3x^2 - \pi^2$ (e i suoi multipli).
8. (a) La serie è $\frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ dispari}} \frac{\sin nx}{n}$, o equivalentemente $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.
- (b) In base ai risultati generali sulla convergenza delle serie di Fourier, possiamo dire che la serie converge a -1 se $x \in (-\pi, 0)$, a 1 se $x \in (0, \pi)$, a 0 se $x = -\pi, 0, \pi$.
- (c) Segue da (b) ponendo $x = \pi/2$.
- (d) Segue da un calcolo diretto.
9. (a) La serie di Fourier di f è $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$, quella di g è $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.
- (b) La serie di Fourier di f converge a 0 per $x = -\pi, \pi$ e in tutti gli altri punti converge a x . La serie di g converge a $|x|$ per tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$.
- (c) Nei due casi si trova rispettivamente

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \frac{2}{3}\pi^3 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

10. La serie di Fourier di f è $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$, e converge a $f(x)$ per tutti gli $x \in [-\pi, \pi]$ (anche gli estremi) perché f è continua e soddisfa $f(\pi) = -f(-\pi)$. utilizzando questa proprietà per $x = \pi$ si ottiene l'uguaglianza richiesta.

11. (a) La serie è $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. Osserviamo che il prolungamento dispari della funzione coincide con la $f(x)$ dell'esercizio 10 e quindi si ritrova lo stesso risultato.

(b) La serie è $-4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}$.

(c) La serie è $\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$.

12. Ricordiamo che la soluzione del problema richiesto ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx),$$

dove i b_n sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo del dato iniziale in serie di soli seni.

(i) In questo caso, il dato iniziale è già scritto come combinazione lineare (finita) di funzioni della forma $\sin nx$, e questo significa che il suo sviluppo in serie di soli seni ha tutti i coefficienti nulli eccetto $b_1 = 2$ e $b_4 = -1$. Ne segue che anche la soluzione cercata si scrive come combinazione lineare finita, precisamente:

$$u(x, t) = 2e^{-t} \sin x - e^{-16t} \sin 4x.$$

(ii) In questo caso, lo sviluppo in serie di soli seni del dato iniziale è stato calcolato nell'esercizio precedente. Troviamo quindi

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2 t} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$$