

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 27.XI.2017

1. (NB si ricorda che l'equazione del piano passante per un punto (x_0, y_0, z_0) perpendicolare a un vettore (v_1, v_2, v_3) è data da $v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$.)

Il punto corrisponde a $(u, v) = (1, -2)$ e il piano tangente ha equazione $4x - 2y + z = 4$. Indicato con U il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2}$, l'area vale

$$\iint_U \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} \, dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \, \rho \, d\rho = \frac{13}{3}\pi.$$

2. Il punto corrisponde a $(u, v) = (0, -2)$ e il piano tangente ha equazione $2y + z = -1$. Indicato con U il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{3}$, l'area vale

$$\iint_U \sqrt{1 + u^2 + v^2} \, dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \rho^2} \, \rho \, d\rho = \frac{14}{3}\pi.$$

3. Si ha $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = r(R + \cos u)$, quindi l'area vale

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + \cos u) \, dudv = 4\pi^2 rR.$$

4. Il punto corrisponde a $(u, v) = (2, \pi/2)$ e il piano tangente ha equazione $x + z = \pi$. L'integrale di $f(x, y) = x + y$ vale

$$\int_0^3 du \int_0^\pi u(\cos v + \sin v) \sqrt{4 + u^2} \, dv = \int_0^3 2u \sqrt{4 + u^2} \, du = \frac{2}{3}(13^{\frac{3}{2}} - 8).$$

5. Il punto corrisponde a $(\theta, \phi) = (\pi/2, \pi/4)$ e il piano tangente ha equazione $y + z = 2\sqrt{2}$. L'area vale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi 4 \sin \phi \, d\phi = 16\pi.$$

La semisfera corrisponde a $\phi \in [0, \pi/2]$. L'integrale di $f(x, y, z) = z$ sulla semisfera vale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (2 \cos \phi)(4 \sin \phi) d\phi = 8\pi.$$

Il flusso vale

$$\iint \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2 \phi)(4 \sin \phi) \, d\phi = \frac{16}{3}\pi.$$

6. L'area del cono vale

$$\int_0^{2\pi} du \int_0^1 \sqrt{5}v \, dv = \sqrt{5}\pi.$$

L'integrale di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ vale

$$\int_0^{2\pi} du \int_0^1 (v^2 + 2v)\sqrt{5}v \, dv = \frac{11}{6}\sqrt{5}\pi.$$

Il flusso vale

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^1 (2v(\cos^2 u + \sin^2 u) - v) \, dv = \pi.$$

7. L'area vale

$$\int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 2 \, dv = 8\pi.$$

L'integrale di funzione vale

$$\int_0^{2\pi} du \int_{-1}^1 (4 + v^2)2 \, dv = \frac{104}{3}\pi.$$

mentre il flusso di $\mathbf{F}$ è nullo, in quanto si trova che $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = 0$ su tutti i punti di Σ .

8. Il punto corrisponde a $(u, v) = (\frac{5}{6}\pi, -1)$ e il piano tangente ha equazione $-\sqrt{3}x + y + 2z = 8$. Il flusso vale

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_{-2}^2 (3 + v^2)(6 - 2v) \, dv = 208\pi.$$

9. Una superficie Σ come nelle ipotesi si può parametrizzare ponendo

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

La parametrizzazione è chiaramente iniettiva su tutto D , perché a valori diversi di (u, v) corrispondono valori diversi delle prime due coordinate del punto su Σ . Essendo f di classe C^1 , anche $\mathbf{r}$ lo è. Inoltre

$$\mathbf{r}_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \mathbf{r}_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

pertanto $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ è non nullo, qualunque sia la funzione f . (NB Gli esercizi 1,2 riguardavano superfici di questo tipo).

10. Applicando il teorema della divergenza, e tenendo presente che gli integrali di x e di z sulla sfera sono nulli per simmetria, troviamo

$$(a) \iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_{V_R} 0 \, dxdydz = 0.$$

$$(b) \iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_{V_R} (2x + 1) \, dxdydz = 1 \cdot \operatorname{vol}(V_R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$(c) \iint_{\Sigma_R} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{V_R} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_{V_R} (2z - 3) \, dxdydz = -3 \cdot \operatorname{vol}(V_R) = -4\pi R^3.$$

11. Osserviamo che $\partial V = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dove Σ_1 e Σ_2 indicano rispettivamente la base inferiore e superiore di V . La normale uscente da V su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$. Il teorema della divergenza implica allora

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma - \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma.$$

In tutti e tre i casi da considerare, si verifica che $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Abbiamo quindi

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma.$$

Nel calcolare gli integrali a secondo membro, va tenuto presente che $z = 0$ su Σ_1 e $z = 10$ su Σ_2 , e che Σ_1 e Σ_2 hanno area pari a 4π , essendo cerchi di raggio 2. Troviamo nei tre casi

- (a) $\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} 0 \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (10^2 - 10^2) \, d\sigma = 0$
- (b) $\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} 0 \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} 10 \, dS = -10 \operatorname{area}(\Sigma_2) = -40\pi$
- (c) $\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS = \iint_{\Sigma_1} -5 \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} 5 \, dS = -5 \operatorname{area}(\Sigma_1) - 5 \operatorname{area}(\Sigma_2) = -40\pi$

12. Per il calcolo utilizzeremo il teorema della divergenza. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2, e con Ω^* la parte di Ω con $-1 \leq z \leq 1$. Allora $\partial\Omega = \Sigma$, mentre $\partial\Omega^* = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove Σ_1 e Σ_2 sono i dischi con $x^2 + y^2 \leq 2^2 - 1^2 = 3$ contenuti nei piani $z = -1$ e $z = 1$ rispettivamente. Osserviamo che la normale esterna su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{\mathbf{k}}$ e da $\hat{\mathbf{k}}$. Pertanto si avrà

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz.$$

$$\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega^*} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz + \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle \, d\sigma.$$

Per il calcolo degli integrali tripli, osserviamo che le sezioni orizzontali Ω_z della sfera sono cerchi di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{4 - z^2}$.

- (a) Abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 4y + 2z - 3z^2$. Osserviamo che per simmetria l'integrale di $4y + 2z$ è nullo sia su Ω che su Ω_0 , quindi basterà integrare il termine $-3z^2$.

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = \int_{-2}^2 dz \iint_{\Omega_z} (-3z^2) \, dxdy = \int_{-2}^2 (-3z^2) \pi(4 - z^2) \, dz = -\frac{128}{5} \pi.$$

Per il calcolo del flusso attraverso Σ_0 , osserviamo che $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = F_3 = z^2 - z^3 - z$ quindi è costante sia su Σ_1 che su Σ_2 e vale rispettivamente 3 e -1 . Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma &= \int_{-1}^1 dz \iint_{\Omega_z} (-3z^2) \, dxdy + \iint_{\Sigma_1} 3 \, d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (-1) \, d\sigma \\ &= -\frac{34}{5} \pi + 3 \operatorname{area}(\Sigma_1) + \operatorname{area}(\Sigma_2) = -\frac{34}{5} \pi + 9\pi + 3\pi = \frac{26}{5} \pi. \end{aligned}$$

- (b) In questo caso abbiamo $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$, pertanto

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, d\sigma = 3 \operatorname{vol}(\Omega) = 32\pi.$$

Inoltre $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = x^2 y^2 - 1$ su Σ_1 , mentre $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{k}} \rangle = x^2 y^2 + 1$ su Σ_2 . L'integrale di $x^2 y^2$ su Σ_1 e su Σ_2 non è difficile da calcolare, ma poiché dà lo stesso valore sui due dischi (che hanno una z diversa ma sono uguali per quanto riguarda le x e le y) e va preso con segno opposto, dà contributo nullo al risultato finale. Possiamo quindi trascurare questi termini e trovare

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma &= \int_{-1}^1 dz \iint_{\Omega_z} 3 dx dy + \iint_{\Sigma_1} (x^2 y^2 - 1) d\sigma - \iint_{\Sigma_2} (x^2 y^2 + 1) d\sigma \\ &= 3 \int_{-1}^1 \pi(4 - z^2) dz - \text{area}(\Sigma_1) - \text{area}(\Sigma_2) = 22\pi - 3\pi - 3\pi = 16\pi. \end{aligned}$$

13. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2, e chiamiamo stavolta Ω^* la parte di Ω con $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Allora $\partial\Omega = \Sigma$, mentre $\partial\Omega^* = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove Σ_1 e Σ_2 sono semicerchi di raggio 2 contenuti rispettivamente nei piani $x = 0$ e $y = 0$. La normale esterna su Σ_1 e Σ_2 è data rispettivamente da $-\hat{\mathbf{i}}$ e da $-\hat{\mathbf{j}}$. Pertanto si avrà

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} dx dy dz.$$

$$\iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega^*} \text{div } \mathbf{F} dx dy dz + \iint_{\Sigma_1} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{i}} \rangle d\sigma + \iint_{\Sigma_2} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{j}} \rangle d\sigma.$$

- (a) Abbiamo $\text{div } \mathbf{F} = 2x - 2z + 2$. Osserviamo che per simmetria $2x$ ha integrale nullo su Ω (ma non su Ω^*) e che $2z$ ha integrale nullo sia su Ω che Ω^* . Pertanto

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iint_{\Sigma} 2 dx dy dz = 2 \text{vol}(\Omega) = \frac{64}{3}\pi.$$

Osserviamo che su Σ_1 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{i}} \rangle = F_1 = x^2 - 2xy = 0$ perché $x = 0$ su Σ_1 . Su Σ_2 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{j}} \rangle = F_2 = 1 + y^2 = 1$ perché $y = 0$ su Σ_2 . Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma &= \iiint_{\Omega^*} (2 + 2x) dx dy dz + \iint_{\Sigma_1} 0 d\sigma + \iint_{\Sigma_2} 1 d\sigma \\ &= 2 \text{vol}(\Omega^*) + \int_0^\pi d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 (2\rho \cos \theta \sin \phi)(\rho^2 \sin \phi) d\rho + \text{area}(\Sigma_2) \\ &= \frac{16}{3}\pi + 4\pi + 2\pi = \frac{34}{3}\pi. \end{aligned}$$

- (b) Abbiamo $\text{div } \mathbf{F} = 2x + 2yz + 2z + 1$. Come prima, $2x$ ha integrale nullo su Ω , ma non su Ω^* . Invece $2yz + 2z$ ha integrale nullo sia su Ω che Ω^* , perché cambia segno se cambia segno z , mentre Ω e Ω^* sono simmetrici rispetto al piano $z = 0$. Pertanto

$$\iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = \text{vol}(\Omega) = \frac{32}{3}\pi.$$

Su Σ_1 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{i}} \rangle = F_1 = x^2 + \sin z = \sin z$ che ha integrale nullo su Σ_1 per simmetria. Su Σ_2 si ha $\langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{j}} \rangle = F_2 = y^2 z - 2 = -2$. Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} \langle \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma &= \iiint_{\Omega^*} (2x + 1) dx dy dz + \iint_{\Sigma_1} \sin z d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (-2) d\sigma \\ &= 4\pi + \frac{8}{3}\pi - 4\pi = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

14. (a) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Scegliamo come verso della normale quello che punta all'esterno del cilindro, che è anche quello del vettore normale dato dalla parametrizzazione $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$. Troviamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (x - y, x + y + 1, -2(1 + z)), \quad \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \rangle = 4(1 + \sin u),$$

quindi il flusso vale

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} du \int_0^3 4(1 + \sin u) dv = 24\pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ è costituito dalle due circonferenze ad altezza $z = 0$ e $z = 3$, da percorrere rispettivamente in senso antiorario e orario, precisamente $\partial\Sigma = \gamma_0 \cup (-\gamma_3)$ dove:

$$\gamma_0(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad \gamma_3(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3).$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [2(\sin t + \cos t)(-2 \sin t) + 2(\sin t - \cos t)(2 \cos t) + 0] dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} [8(\sin t + \cos t)(-2 \sin t) + 8(\sin t - \cos t)(2 \cos t) + 0] dt \\ &= -8\pi + 32\pi = 24\pi, \end{aligned}$$

lo stesso risultato trovato prima.

- (b) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Si ha che $\operatorname{rot} \mathbf{F} = z\hat{\mathbf{i}} + (1 - x)\hat{\mathbf{k}}$. Parametizziamo Σ in coordinate polari $x = \cos \theta \sin \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \phi$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, \pi/2]$. Troviamo

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi \rangle = -\sin \phi \cos \phi.$$

Scegliamo come verso della normale quello che punta verso l'esterno (in direzione opposta all'origine). Osservando che $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$ punta nel verso opposto a quello scelto, troviamo

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi d\phi = \pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano $z = 0$, percorsa in verso antiorario, che può essere parametrizzata come $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Troviamo

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [(\cos t \sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 0] dt = \pi.$$

- (c) Calcoliamo il flusso usiamo la definizione. Scegliamo come verso della normale quello che punta all'esterno del cono, che è anche quello del vettore normale dato dalla parametrizzazione $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2 - v)(\cos u, \sin u, 1)$. Troviamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (xz, -yz, 2), \quad \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \rangle = (2 - v)^2 v (\cos^2 u - \sin^2 u) + 2(2 - v),$$

quindi il flusso vale

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \hat{\mathbf{n}} \rangle d\sigma = \int_0^1 dv \int_0^{2\pi} [(2 - v)^2 v (\cos^2 u - \sin^2 u) + 2(2 - v)] du = 6\pi.$$

Usiamo ora il teorema di Stokes. Il bordo $\partial\Sigma$ si può scrivere come $\partial\Sigma = \gamma_0 \cup (-\gamma_1)$ dove:

$$\gamma_0(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0), \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 1).$$

Troviamo quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} [(-2 \sin t)(-2 \sin t) + (2 \cos t)(2 \cos t) + 0] dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} [-(\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 0] dt = 8\pi - 2\pi = 6\pi. \end{aligned}$$

15. Le identità si dimostrano con un calcolo diretto usando le definizioni.
16. (a) L'identità segue dal teorema di Gauss-Green, o dal teorema della divergenza. Ad esempio, possiamo porre $\mathbf{F} := f \nabla f$ e applicare il teorema della divergenza al campo $\mathbf{F}$, osservando che $\operatorname{div} \mathbf{F} = \|\nabla f\|^2 - f \Delta f$ (vedi esercizio precedente) e che $\mathbf{F}$ ha flusso nullo essendo $f \equiv 0$ su $\partial\Omega$ per ipotesi.
- (b) Per il punto (a), se $\Delta f \equiv 0$ abbiamo che l'integrale di $\|\nabla f\|^2$ su Ω è nullo. Essendo $\|\nabla f\|^2$ una funzione continua non negativa, l'annullarsi dell'integrale implica che $\|\nabla f\|^2$ è nullo ovunque, cioè che $\nabla f \equiv 0$ su Ω . Per un noto risultato, ciò implica che f è costante su Ω , ma la costante deve essere zero perché f vale zero su $\partial\Omega$ per ipotesi.
- (c) Ponendo $h = f_2 - f_1$, si trova che h soddisfa le ipotesi del punto (b). Quindi h è nulla ovunque, cioè $f_1 \equiv f_2$.
17. (a) Il gradiente di una funzione f è sempre irrotazionale, qualunque sia f , mentre non è detto che sia solenoidale. Calcoliamo quindi esplicitamente $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$. Troviamo dapprima

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

e poi $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$; quindi in questo caso ∇f è anche solenoidale.

- (b) Dire che f è armonica equivale a dire che ∇f è solenoidale, proprietà che è stata verificata nel punto precedente.
- (c) Indicando con Σ_1 la superficie sferica, su Σ_1 si ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e pertanto $\nabla f = (-x, -y, -z)$. Quindi $\nabla f = -\hat{n}$, perché su ogni punto di Σ_1 la normale esterna ha le stesse componenti del punto stesso. Il flusso vale pertanto

$$\iint_{\Sigma_1} \langle \nabla f, \hat{n} \rangle dS = \iint_{\Sigma_1} (-1) dS = -\operatorname{area}(\Sigma_1) = -4\pi.$$

- (d) Se un tale campo esistesse, il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \nabla f$ attraverso una qualunque superficie chiusa sarebbe nullo per il teorema di Stokes. Ma ciò è contraddetto dal risultato del punto precedente.
- (e) La superficie in questione è il bordo di Ω , la sfera piena di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 1. Osserviamo che Ω non contiene l'origine, e quindi f è definita su tutto Ω . Essendo f armonica, il flusso di ∇f attraverso $\partial\Omega$ è nullo per il teorema della divergenza.

- (f) In questo caso l'origine è interna alla sfera, quindi l'argomentazione del punto precedente va modificata. Indichiamo con Ω la sfera piena di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 10 privata della sfera piena di centro l'origine e raggio 1. In questo modo Ω non contiene l'origine e f è definita su tutto Ω . Il bordo di Ω è costituito dalla superficie sferica nel testo dell'esercizio (che indichiamo con Σ) e dalla superficie Σ_1 già incontrata nel punto (c). La normale uscente da Ω coincide con quella uscente da Σ e con quella entrante in Σ_1 . Applicando il teorema della divergenza a ∇f su Ω , ricordando che f è armonica e facendo attenzione al verso delle normali, troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega} \Delta f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS \\ &= \iint_{\partial\Sigma} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS - \iint_{\partial\Sigma_1} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS = \iint_{\partial\Sigma} \langle \nabla f, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, dS + 4\pi. \end{aligned}$$

Ne segue che il flusso cercato vale -4π .

- (g) Il campo ∇f è banalmente conservativo (è definito come il gradiente di una funzione). Quindi la sua circuitazione su una qualunque curva chiusa è nulla.