

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 5.XI.2017

1. Gli integrali richiesti valgono:

$$(a) \frac{1}{3} + \frac{\pi^2(1 - e^{-3})}{24} \quad (b) \frac{2}{3} \quad (c) \frac{e^5 - e^4 - e + 1}{2} \quad (d) \frac{e^2 + 3e^{-2}}{4} \quad (e) \frac{4}{15}.$$

$$2. \quad (a) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{-2x} (1 - xy) \, dy \left(\text{oppure} \int_0^2 dy \int_{-1}^{-\frac{y}{2}} (1 - xy) \, dx \right) = \frac{3}{2}.$$

$$(b) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^3 dx \int_{\frac{x}{3}-1}^{-\frac{2}{3}x+2} (2x - 3y) \, dy = \frac{9}{2} \quad \text{oppure}$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{3y+3} (2x - 3y) \, dx + \int_0^2 dy \int_0^{-\frac{3}{2}y+3} (2x - 3y) \, dx = \frac{9}{2}.$$

$$(c) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_{2x}^{-x} \sin \frac{\pi}{2}(x + y) \, dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \left(\cos \frac{3}{2}\pi x - 1 \right) dx = -\frac{4 + 6\pi}{3\pi^2}.$$

$$(d) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{\frac{x}{2}} (1 + x) \, dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\frac{x}{2}} (1 + x) \, dy = 8, \text{ oppure}$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{y+2} (1 + x) \, dx + \int_0^2 dy \int_{2y}^{y+2} (1 + x) \, dx = 8.$$

$$(e) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^{3-2y} (x - y) \, dx = \int_0^1 (4y^2 - 10y + 4) \, dy = \frac{1}{3}$$

$$(f) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-x-2}^{x+3} (y + x^2) \, dy = \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2} + x + 5x^2 + 2x^3 \right) dx = \frac{19}{6}.$$

(g) Scrivendo Ω come insieme normale in coordinate cartesiane si trova:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y) \, dy \left(\text{oppure} \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x + y) \, dx \right) = \frac{16}{3}.$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari:

$$\int_0^2 d\rho \int_0^{\pi} \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta = \int_0^2 2\rho^2 \, d\rho = \frac{16}{3}$$

$$(h) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^4 dx \int_0^{1/x} (2x + 3xy) \, dy = 6 + 3 \ln 2.$$

$$(i) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^2 dx \int_0^{1+x^2} (x - y) \, dy = -\frac{51}{20}.$$

$$(j) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x - y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 (y - x) dy = \frac{11}{60}.$$

$$(k) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} \frac{x^2}{(y+1)^2} dy \\ = \int_{-1}^3 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = 6 - \arctan 3 - \frac{\pi}{4} - 2 \ln 5.$$

$$(l) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_1^3 dx \int_{x^2+3}^{4x} \frac{x}{\sqrt{y}} dy = \frac{8}{5}(9\sqrt{3}-1) - \frac{16}{3}(3\sqrt{3}-1).$$

3. Per trovare il baricentro vanno calcolati tre integrali su Ω (talvolta alcuni possono essere dedotti da proprietà di simmetria); indichiamo l'impostazione solo nel caso del calcolo dell'area. Usiamo la notazione $|\Omega|$ per l'area di Ω e $(\bar{x}, \bar{y})$ per il baricentro.

$$(a) |\Omega| = \int_0^1 dx \int_{x^2-x}^0 dy = \frac{1}{6}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10} \right).$$

$$(b) |\Omega| = \int_{-2}^2 dy \int_{2y^2}^{y^2+4} dx = \frac{32}{3}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{16}{5}, -0 \right).$$

$$(c) |\Omega| = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} dy = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - 2 \ln 2, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{3|\Omega|}, \frac{1}{3|\Omega|} \right).$$

$$(\text{ricordiamo che } \int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a-x^2} + \frac{\sqrt{a}}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}).$$

(d) Ω è la differenza di due semicerchi di raggio 2 e di raggio 1. Ricordando la formula per l'area del cerchio, troviamo dapprima

$$|\Omega| = \frac{1}{2}(4\pi) - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

La coordinata $\bar{x}$ è nulla per simmetria. Per calcolare $\bar{y}$ possiamo scrivere Ω come dominio normale, al modo seguente

$$\bar{y} = \left(\frac{3}{2}\pi \right)^{-1} \left(\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} y dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} y dy \right) = \frac{28}{9\pi},$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari,

$$\bar{y} = \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi d\theta \int_1^2 \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi \frac{7}{3} \sin \theta d\theta = \frac{28}{9\pi}.$$

4. Per rispondere alla domanda dobbiamo trovare l'area di Ω e l'integrale di x e di y su Ω . L'area di Ω è evidentemente pari a $2 + 5 = 7$. Per trovare il valore degli integrali di x e di y dobbiamo prima ricostruire il loro valore su Ω_1 e Ω_2 . Indicando con $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ le coordinate del baricentro di Ω_i , per $i = 1, 2$, abbiamo che

$$\iint_{\Omega_i} x dx dy = \frac{|\Omega_i|}{|\Omega_i|} \iint_{\Omega_i} x dx dy = |\Omega_i| \bar{x}_i.$$

Pertanto

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} x \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} x \, dx \, dy = |\Omega_1| \bar{x}_1 + |\Omega_2| \bar{x}_2 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5.$$

Analogamente si trova che l'integrale di y vale $2 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15$. Le coordinate del baricentro sono quindi $(\frac{5}{7}, \frac{15}{7})$. (NB Non sono la somma delle coordinate dei baricentri di Ω_1 e Ω_2 , bensì una media pesata).

5. Risolviamo gli integrali passando in coordinate polari. In tutti gli esercizi considerati, è possibile invertire l'ordine di integrazione tra ρ e θ senza sostanziali differenze nella lunghezza del calcolo.

$$(a) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 2\rho^2(\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho = \frac{32}{3}.$$

$$(b) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^3 \cos^2 \theta - \rho^2 \cos \theta) \, d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}.$$

NB è sbagliato mettere come estremi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ oppure $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta$.

$$(c) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 (1 - \rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho \, d\rho = \frac{9}{4}\pi - \frac{81}{8}.$$

$$(d) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2(\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1).$$

$$(e) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (2\rho^2 + \rho \sin \theta) \rho \, d\rho = 65\pi.$$

- (f) Usando coordinate polari centrate in $(1, 1)$, cioè $x = 1 + \cos \theta$, $y = 1 + \sin \theta$, si ottiene

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 + \rho(\cos \theta + \sin \theta)) \rho \, d\rho = 2\pi.$$

- (g) Usiamo coordinate polari centrate in (x_0, y_0) , cioè $x = x_0 + \rho \cos \theta$, $y = y_0 + \rho \sin \theta$:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (x_0 + \rho \cos \theta - y_0 - \rho \sin \theta) \rho \, d\rho = \pi(x_0 - y_0)$$

6. (a) Convieni scrivere Ω come differenza di un settore circolare e di un triangolo:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho - \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{3}y}^{\sqrt{3}y} (x^2 + y^2) \, dx = \frac{8}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

- (b) Convieni scrivere Ω come differenza di un quarto di cerchio e di un triangolo:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta)^2 \rho \, d\rho - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)^2 \, dy = \frac{\pi}{8}$$

- (c) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(0, 1)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^3(1 + \cos \theta \sin \theta) + 2\rho^2(\cos \theta + \sin \theta) + \rho) d\rho \\ &\quad + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3}(y-1)}^{\sqrt{3}(1-y)} (x+y)^2 dx = 8\pi + \frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

- (d) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(-2, 0)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^3 - 4\rho^2 \sin \theta) d\rho + \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{-\frac{y}{\sqrt{3}}-2}^{-\sqrt{3}y} (x^2 + y^2 - 4) dx \\ &= \frac{16}{3}\pi + 16 + \dots \end{aligned}$$

- (e) (cf. l'es. 3.43 (a) di Marcellini-Sbordone) Il dominio è meno semplice dei precedenti da scrivere in coordinate polari: conviene dividerlo in due parti e scrivere l'intervallo dei valori di ρ in dipendenza da θ , come segue:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos \theta} d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^{1/\sin \theta} d\rho = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\pi}{2}.$$

(notare che la funzione integranda si semplifica con lo jacobiano delle coordinate polari). Si può anche scrivere il dominio come differenza di un quadrato e di un quarto di cerchio, ma in questo modo è lungo il calcolo dell'integrale di f sul quadrato.

- (f) (cf. l'esempio 14.13 (a) di Bertsch-Dal Passo -Giacomelli) Usando coordinate polari centrate in $(0, 0)$ (non in $(1, 0)$ che è il centro del cerchio) si trova

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos \theta} \rho^2 d\rho = \frac{32}{9}.$$

7. Il tetraedro Ω può essere descritto come insieme normale rispetto all'asse z , al modo seguente

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - x - y\},$$

dove abbiamo indicato con T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ nel piano. T a sua volta si può scrivere come

$$T = \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

- (a) Calcoliamo dapprima il volume:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(oppure si può usare la nota proprietà che il volume di un tetraedro è dato dall'area della base per l'altezza diviso tre). Pertanto

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 6 \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x \, dz \\ &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1-x-y) \, dy = 3 \int_0^1 x(1-x)^2 \, dx = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Con un calcolo analogo si trova che anche le coordinate $\bar{y}$ e $\bar{z}$ valgono $1/4$ (come si può dedurre anche dalla simmetria del dominio).

(b) Troviamo

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right) \, dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \, dy = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \left(1 - \sin\frac{\pi}{2}x\right) \, dx = \frac{4}{\pi^2}(\pi - 2).\end{aligned}$$

8. Conviene integrare sulla piramide per strati. Lo strato di altezza z è il triangolo di vertici $(-2+2z, 0, 0)$, $(0, -2+2z, 0)$ e $(1-z, 0, 0)$, che si può scrivere come:

$$\Omega_z = \left\{ (x, y) : y \in [2z-2, 0], \quad -y+2z-2 \leq x \leq 1-z+\frac{y}{2} \right\}, \quad z \in [0, 1].$$

Calcolando i rispettivi integrali si trova che il baricentro ha coordinate $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. L'integrale della funzione vale invece

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \int_{2z-2}^0 dy \int_{-y+2z-2}^{\frac{y}{2}+1-z} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 dz \int_{2z-2}^0 \left[\sin\frac{3}{4}\pi y - \cos\frac{3}{2}\pi z \right] \, dy \\ &= -\frac{8}{3\pi^2} \int_0^1 \left(\sin\frac{3}{2}\pi z + 1 \right) \, dz + \frac{4}{\pi} \int_0^1 (z-1) \cos\frac{3}{2}\pi z \, dz = -\frac{32}{9\pi^3} - \frac{8}{3\pi^2}.\end{aligned}$$

9. (a) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.
 (b) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \, z \geq 0\}$.
 (c) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, \, 0 \leq z \leq h\}$.
 (d) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \left[\frac{R}{h}(z-h)\right]^2, \, 0 \leq z \leq h\}$.
 (e) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{h}z\right)^2, \, 0 \leq z \leq h\}$.

10. Nelle risposte usiamo la notazione $C(r)$ per indicare il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio r .

- (i) (b) $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in C(R), \, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$
 (c) $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in C(R), \, 0 \leq z \leq h\}$
 (e) $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in C(R), \, \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h\}$.

- (ii) (b) $\Omega_z = C(\sqrt{R^2 - z^2})$, per $z \in 0 \leq R$
 (c) $\Omega_z = C(R)$, per $z \in [0, h]$,
 (e) $\Omega_z = C\left(\frac{R}{h}z\right)$, per $z \in [0, h]$.
- (iii) (b) $z \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$
 oppure $\rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, \sqrt{R^2 - \rho^2}]$,
 (c) $z \in [0, h], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, R]$,
 (e) $z \in [0, h], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, \frac{R}{h}z]$ oppure $\rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [\frac{h}{R}\rho, h]$.
- (iv) Il volume vale rispettivamente (b) $\frac{2}{3}\pi R^3$, (c) $\pi R^2 h$, (e) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.
- (v) Il baricentro ha coordinate rispettivamente (b) $(0, 0, \frac{3}{8}R)$, (c) $(0, 0, \frac{h}{2})$, (e) $(0, 0, \frac{3}{4}h)$.
- (vi) Il momento d'inerzia vale rispettivamente (b) $\frac{4}{15}\pi R^5$, (c) $\frac{\pi}{2}R^4 h$, (e) $\frac{\pi}{10}R^4 h$.

11. In tutti i casi ρ varia in $[0, 1]$, mentre θ e ϕ hanno le seguenti limitazioni.

- (i) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2], \phi \in [0, \pi]$
 (ii) $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [\pi/2, \pi]$
 (iii) $\theta \in [-\pi/2, 0], \phi \in [0, \pi]$
 (iv) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2], \phi \in [0, \pi/2]$
 (v) $\theta \in [\pi, 3\pi/2], \phi \in [0, \pi/2]$.

NB sono corrette anche le risposte ottenute aggiungendo a entrambi gli estremi un multiplo intero di 2π ; tutte le altre sono sbagliate (ad es., se la risposta giusta è $\theta \in [-\pi/2, 0]$, va ugualmente bene $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, mentre risposte quali $\theta \in [0, 3\pi/2]$, o $\theta \in [3\pi/2, 0]$ o ancora $\theta \in [-\pi/2, 2\pi]$ sono sbagliate); l'unica eccezione è naturalmente il caso di $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $[0, 2\pi]$ può essere sostituito da un qualunque altro intervallo della stessa ampiezza.

12. Indichiamo con δ la densità (costante) del cilindro e con h la sua altezza (che non sono note, ma si vedrà che il loro valore non influirà sul risultato finale). Si trova che la massa del cilindro vale $25\pi\delta h$ e il momento d'inerzia $\frac{625}{2}\pi\delta h$. D'altra parte sappiamo che la massa vale 4, quindi $\pi\delta h = 4/25$, da cui si deduce che il momento d'inerzia vale 50.
13. Si ha che $\Omega_z = C(\sqrt{4 - z^2})$ (cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{4 - z^2}$) per $z \in [-1, 0]$, quindi la massa di Ω si può calcolare al modo seguente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_{-1}^0 dz \int_{C(\sqrt{4-z^2})} (1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1 + \rho^2 + z^2) \rho d\rho = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (-z^4 - 2z^2 + 24) d\theta = \frac{347}{30} \pi. \end{aligned}$$

Oppure si può scrivere Ω come unione di un settore sferico Ω_1 e in un cono Ω_2 , usando coordinate sferiche su Ω_1

$$\iiint_{\Omega_1} (1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (1 + \rho^2) \rho^2 \sin \phi d\theta = \frac{136}{15} \pi,$$

e cilindriche su Ω_2

$$\iiint_{\Omega_2} (1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\sqrt{3}z}} (1 + \rho^2 + z^2) \rho d\rho = \frac{5}{2}\pi.$$

Sommndo i contributi, si ottiene il risultato di $\frac{347}{30}\pi$ già ottenuto con l'altro metodo.

14. In coordinate sferiche il dominio è descritto dalle limitazioni $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Pertanto il momento d'inerzia è dato da

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2 \phi) (\rho^2 \sin \phi) d\phi \\ &= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

oppure in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (16 - 8z^2) dz = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

15. Conviene usare le coordinate sferiche, rispetto alle quali il dominio corrisponde a $\rho \in [0, 3], \theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, \pi/2]$. Pertanto la massa è data da

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1 + x + y) dx dy dz &= \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} (1 + \rho \sin \phi (\cos \theta + \sin \theta)) (\rho^2 \sin \phi) d\theta \\ &= \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} \rho^2 \sin \phi + 2\rho^3 \sin^2 \phi \right) d\phi \\ &= \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2} \rho^2 + \frac{\pi}{2} \rho^3 \right) d\rho = \frac{117}{8}\pi. \end{aligned}$$

16. Osserviamo che il dominio è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati, in particolare rispetto a $x = 0$ e a $z = 0$, quindi i termini x e z^3 hanno integrale nullo perché funzioni dispari. E' sufficiente quindi integrare il solo termine y^2 . E' possibile integrare per strati:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz &= \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} [(2 - z^2)^2 - 1] dz = \frac{14}{15}\pi. \end{aligned}$$

In alternativa, è possibile scrivere il dominio come $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ dove Ω_1 si scrive in coordinate sferiche come

$$\Omega_1 = \left\{ (\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$$

mentre Ω_2 si scrive in coordinate cilindriche come

$$\Omega_2 = \left\{ (\rho, \theta, z) : -1 \leq z \leq \sqrt{1}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Gli integrali valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_1} y^2 dx dy dz &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 \sin^3 \phi d\rho \\ &= \frac{4}{5}\sqrt{2}\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^3 \phi d\phi = \frac{4}{3}\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_2} y^2 dx dy dz &= \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|z|}^1 \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} (1 - z^4) dz = \frac{2}{5} \pi. \end{aligned}$$

Sottraendo i due risultati si trova il valore dell'integrale su Ω .

17. Sia $\delta(x, y, z)$ la densità di Ω e sia m la sua massa. Dalla definizione di baricentro segue che

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} (ax + by + cz) \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

Per ipotesi, $ax + by + cz > A$ su tutti i punti di Ω , e quindi vale anche $(ax + by + cz)\delta(x, y, z) > A\delta(x, y, z)$ perché δ è positiva essendo una densità. Abbiamo quindi

$$a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} > \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} A \delta(x, y, z) dx dy dz = \frac{A}{m} m = A.$$

18. Osserviamo che Ω_0 è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$ (ma non rispetto a $z = 0$). Pertanto funzioni dispari rispetto a x e/o rispetto a y hanno integrale nullo. Funzioni positive (risp. negative) su tutto Ω_0 hanno invece sicuramente integrale positivo (risp. negativo). Per brevità, nelle risposte chiamiamo “positive su Ω_0 ” anche funzioni che valgono zero su un sottoinsieme di misura nulla e sono strettamente positive sul resto di Ω_0 (es. la funzione x). Troviamo nei vari casi
- (i) Ha integrale positivo, pari al volume di Ω_0 .
 - (ii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (iii) Ha integrale positivo (perché z è positiva su Ω_0).
 - (iv) Ha integrale positivo (perché y^2 è positiva su Ω_0).
 - (v) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (vi) Ha integrale positivo, perché $x^2 z$ è positiva su Ω_0 .
 - (vii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (viii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a y).
 - (ix) Ha integrale positivo, perché xy è compreso tra -1 e 1 su Ω_0 , e il coseno di una quantità tra -1 e 1 è positivo.
 - (x) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y ; tuttavia soddisfa $f(-x, -y) = -f(x, y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè vale $(x, y, z) \in \Omega$ se e solo se $(-x, -y, z) \in \Omega$, si ha che l'integrale è nullo.
 - (xi) Il termine x^3 è dispari e quindi dà contributo nullo all'integrale. Il termine $z^3 - z$ è invece negativo per $z \in [0, 1]$, come avviene nei punti di Ω_0 . L'integrale di f quindi è negativo.
 - (xii) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y ; tuttavia soddisfa $f(y, x) = -f(x, y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè $(x, y, z) \in \Omega$ se e solo se $(y, x, z) \in \Omega$, l'integrale è nullo.