**UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"**

**Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari**

Risposte (sintetiche) ai quesiti degli esercizi del 6.X.2017

1. (a) $\Omega$ è aperto, $\partial\Omega = \{0,1,2\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$, $\overline{\Omega} = [0,1] \cup [2,+\infty)$.
   (b) $\Omega$ né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \{0,1\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$.
   (c) $\Omega$ è chiuso, $\partial\Omega = \{0,1,2,3\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = (0,1) \cup (3,\infty)$, $\overline{\Omega} = \Omega$.
   (d) $\Omega$ né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{0\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.
   (e) $\Omega$ né aperto né chiuso, $\overset{\circ}{\Omega} = (0,1) \times (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$, $\partial\Omega = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 1, y = 0 \text{ o } y = 1\} \cup \{(x,y) :\ 0 \le y \le 1, x = 0 \text{ o } x = 1\}$, cioè $\partial\Omega$ è l'unione dei quattro lati del quadrato.
   (f) $\Omega$ è chiuso, $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in (1,3], y = 0\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 < 1\}$, $\overline{\Omega} = \Omega$.
   (g) $\Omega$ né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.
   (h) $\Omega$ né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y)\ :\ x = 0, y \in [-1,1]\}$, $\overset{\circ}{\Omega} = \emptyset$.

2. Se $x_0 \notin \Omega$ è di frontiera per $\Omega$, ogni suo intorno sferico contiene punti di $\Omega$, che quindi sono diversi da $x_0$ stesso perché $x_0$ non appartiene a $\Omega$. Quindi è soddisfatta la proprietà che definisce i punti di accumulazione.
   Viceversa, se $x_0 \notin \Omega$ è di accumulazione per $\Omega$, ogni suo intorno sferico contiene punti di $\Omega$ (per definizione di punti di accumulazione) e non di $\Omega$ ($x_0$ stesso) quindi è soddisfatta la proprietà di punto di frontiera.

3. La dimostrazione è analoga al caso unidimensionale. La funzione $f$ è continua sull'insieme chiuso e limitato $D$, quindi assume massimo e minimo su $D$. Se la funzione è costante su $D$, allora banalmente ogni punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ soddisfa la tesi. Se la funzione non è costante su $D$, allora almeno uno tra il massimo e il minimo sarà diverso dal valore costante assunto su $\partial D$, e quindi sarà raggiunto in un punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$. In tale punto la $f$ avrà quindi gradiente nullo, essendo un punto di massimo/minimo interno.

4. La funzione $f$ è continua sull'insieme chiuso e limitato $D$, quindi assume massimo e minimo su $D$. Dalle ipotesi sul segno di $f$ segue che il minimo è zero, ed è assunto su tutti i punti di frontiera, mentre il massimo è positivo ed è assunto in uno o più punti interni a $D$, che quindi devono essere critici per $f$. Poiché per ipotesi non ci sono punti critici interni di $f$ interni a $D$ oltre a $x_0$, l'unica possibilità è che il massimo di $f$ su $D$ cada in $x_0$. Essendo $x_0$ interno a $D$, esiste un intorno $B_d(x_0)$ contenuto in $D$, pertanto vale

$$f(x) \le \max_D f = f(x_0), \qquad \forall x \in B_d(x_0),$$

   cioè $x_0$ è un punto di massimo relativo per $f$.

5. Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(13x - 5y - 7)$; la derivata direzionale vale $3/4$.

6. Iperpiano tangente: $w = -x + 3y - 9z + 14$; la derivata direzionale vale 15.

7. (a) $(0, \frac{1}{2})$ sella.
   (b) $(0,0)$ sella, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ minimo.
   (c) $(0,0)$ minimo, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sella, $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sella.
   (d) $(0,0)$ sella.
   (e) $(0,0)$ sella, $(0,-1)$ sella, $(-1,0)$ sella, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ massimo.
   (f) $(2,0)$ massimo.
   (g) $(0,0)$ sella, $(2,0)$ minimo, $(-2,0)$ minimo.
   (h) $(4,2)$ minimo
   (i) $(x,y,z) = (1,1,-\frac{1}{2})$ sella
   (j) $(0,0,0)$ sella, $(1,1,1/\sqrt{2})$ sella, $(-1,-1,1/\sqrt{2})$ sella.

8. Il determinante e la traccia sono rispettivamente il prodotto e la somma degli autovalori dell'hessiano. Se $n > 2$, è possibile trovare $n$ numeri che abbiano somma e prodotto positivo, ma che non siano tutti positivi. Un semplice esempio, con $n = 3$, sono i numeri $-1, -1, 3$. Basta quindi costruire una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che abbia un punto critico con hessiano avente questi numeri come autovalori: ad esempio la funzione $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + 3z^2)$ nel punto $(0,0,0)$.

9. La restrizione di $f$ su una retta generica soddisfa $f(at,bt) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$. Per $t = 0$ questa quantità ha derivata prima nulla e derivata seconda pari a $b^2$; quindi, se $b \neq 0$, ha un minimo. Per $b = 0$, la funzione vale $a^4t^4$, che ha anch'essa un minimo per $t = 0$. Quindi la funzione ha un minimo su ogni retta.

   D'altra parte, è facile studiare il segno di $f$. La funzione si annulla lungo le due parabole $y = 2x^2$ e $y = x^2$ (in particolare, nell'origine). E' positiva al di sopra della parabola $y = 2x^2$ e al di sotto della parabola $y = x^2$, mentre è negativa nella regione tra le due parabole. Pertanto, ogni intorno dell'origine contiene sia punti con $f$ positiva che punti con $f$ negativa. Ne segue che $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo.

10. Preso qualunque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ consideriamo la retta per $(x_0,y_0)$ e $(x,y)$. Per ipotesi, la restrizione di $f$ su tale retta ha un minimo globale in $(x_0,y_0)$, e questo implica che $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$. Questo vale per ogni $(x,y)$, e pertanto $f$ ha un minimo globale. La formulazione in termini di minimi locali è invece falsa, come mostra l'esercizio precedente.

11.

| | |
|---|---|
| (a) massimo assoluto, non stretto | (b) né massimo né minimo |
| (c) né massimo né minimo | (d) minimo relativo ma non assoluto, non stretto |
| (e) massimo assoluto, non stretto | (f) né massimo né minimo |
| (g) né massimo né minimo | (h) massimo relativo ma non assoluto, non stretto |
| (i) minimo assoluto, stretto | (l) massimo assoluto, stretto in un intorno |
| (m) né massimo né minimo | (n) minimo assoluto, non stretto |
| (o) né massimo né minimo | (p) né massimo né minimo |
| (q) massimo locale, non stretto | (r) né massimo né minimo. |

12. (a) $(0,0)$ min, $(4,\sqrt{2})$ né max né min, $(4,-\sqrt{2})$ né max né min.
    (b) $(0,0)$ né max né min, $(\frac{3}{4},0)$ min, $(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{8}})$ max , $(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ né max né min, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ né max né min.
    (c) $(0,0)$ né max né min, $(0,2)$ max, $(\sqrt{3},3)$ né max né min, $(-\sqrt{3},3)$ né max né min.
    (d) $(0,0)$ min, $(1,\frac{1}{2})$ né max né min, $(-1,\frac{1}{2})$ né max né min.

13. (a) Se $a \neq 0$, l'unico punto critico è $(0,1)$, ed è un minimo quando $a > 0$ mentre non è né massimo né minimo quando $a < 0$. Se $a = 0$, tutti i punti della retta $x + y = 1$ sono critici, e sono tutti di minimo (assoluto) per $f$.
    (b) Se $a > 0$ ci sono tre punti critici: $(0,\frac{a}{2})$ di minimo, $(-\sqrt{a},a)$ e $(-\sqrt{a},a)$ né di massimo né di minimo. Se $a \leq 0$ c'è un unico punto, $(0,\frac{a}{2})$, che non è né di massimo né di minimo.
    (c) Se $-1 < a < 1$ ci sono quattro punti critici: $(a,\sqrt{1-a^2})$ e $(a,-\sqrt{1-a^2})$ entrambi né di massimo né di minimo, $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ di massimo, $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ di minimo. Se $a \geq 1$, ci sono due punti: $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ di massimo e $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ né di massimo né di minimo. Se $a \leq -1$, ci sono ancora due punti, stavolta $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ non è né di massimo né di minimo mentre $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3},0\right)$ è di minimo.

14. (a) Per $\lambda = 2$ il punto è di minimo, per gli altri $\lambda$ non è critico.
    (b) $P_1$ è di minimo, $P_2$ non è critico, $P_3$ non è né di massimo né di minimo.
    (c) L'origine è di sella per $f$, non è critico per $g$, è di massimo per $h$.
    (d) Il punto $(0,1)$ è di massimo per $f$, non è critico per $g$, è di minimo per $h$.

15. (a) Usando la definizione si vede facilmente che, se $\phi$ è crescente, un punto di massimo locale per $f$ è di massimo locale anche per $g$, e lo stesso vale per i minimi locali. Se invece $\phi$ è decrescente, un punto di massimo per $f$ diventa di minimo per $g$, e viceversa. Se la monotonia di $\phi$ non è stretta, l'implicazione inversa potrebbe non valere.
    (b) La regola di derivazione di funzione composta dà che $\nabla g(x,y) = \phi'(f(x,y))\nabla f(x,y)$. Quindi se vale $\nabla f(x,y) = 0$ allora si ha $\nabla g(x,y) = 0$. Tuttavia, anche i punti con $\nabla f(x,y) \neq 0$ ma con $\phi'(f(x,y)) = 0$ soddisfano $\nabla g(x,y) = 0$, quindi in generale ci

possono essere punti critici per $g$ ma non per $f$. Se $\phi'$ non si annulla mai, ciò non si può verificare, e quindi $f$ e $g$ hanno gli stessi punti critici.

16. Per $(x, y) \neq (0, 0)$ la funzione è di classe $C^\infty$ e le sue derivate parziali prime si calcolano nel modo usuale, trovando:

$$f_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Nel punto $(0, 0)$ invece, studiando il limite del rapporto incrementale, si trova che $f_x$ e $f_y$ esistono e valgono entrambe 0.

Studiando il limite di $f(x, y)$ su una retta per l'origine $y = ax$, si trova

$$\lim_{x \to 0} f(x, ax) = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Poiché il limite è diverso da zero per tutte le rette con $a \neq 0$, concludiamo che la funzione non è continua.

La non continuità implica la non differenziabilità. Pertanto $f_x$ e $f_y$ non possono essere continue in $(0, 0)$, altrimenti ci sarebbe una contraddizione col teorema del differenziale totale. Ciò si verifica anche direttamente, studiando il limite sulle rette, ad es.

$$\lim_{x \to 0} f_x(x, ax) = \lim_{x \to 0} \frac{a(a^2 - 1)}{x(1 + a^2)^2} = \pm\infty.$$

17. Presa una qualunque direzione $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(at, bt) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{a^3 bt}{a^6 t^4 + b^2} = 0.$$

D'altra parte, studiando il limite lungo la curva $y = ax^3$, troviamo

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^3) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0),$$

quindi $f$ non è continua.

18. La funzione di una variabile $\alpha \to \sqrt{\alpha}$ è continua per $\alpha \in [0, +\infty)$ e derivabile per $\alpha \in (0, +\infty)$. Poiché $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni $(x, y)$ ed è nullo solo per $(x, y) = (0, 0)$, deduciamo che $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ e derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne eventualmente $(0, 0)$. Uno studio diretto del rapporto incrementale mostra che le derivate parziali di $f$ in $(0, 0)$ non esistono.

Osserviamo che, per definizione di modulo, $f(x, y)$ coincide con $|(x, y)|$, il modulo del vettore $(x, y)$. Allora, presi due punti qualunque $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ troviamo, usando le proprietà del modulo (in particolare la disuguaglianza triangolare):

$$\begin{aligned} f(tv_1 + (1 - t)v_2) &= |tv_1 + (1 - t)v_2| \leq |tv_1| + |(1 - t)v_2| \\ &= t|v_1| + (1 - t)|v_2| = tf(v_1) + (1 - t)f(v_2), \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza richiesta per la convessità.