

Il compito aveva quattro varianti, che si svolgevano con procedimenti pressochè identici. Riportiamo le risposte agli esercizi di tutte le varianti. A titolo esemplificativo, riportiamo anche uno svolgimento (sintetico) della prima variante.

Compito n. 1

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = (x - 1)(x^2 + y^2 - a)$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

Svolgimento Le derivate parziali di f sono

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 - 2x + y^2 - a \\ f_y(x, y) = 2y(x - 1). \end{cases}$$

Vediamo che $f_y = 0$ se e solo se $x = 1$ oppure $y = 0$. Se $x = 1$, la condizione $f_x = 0$ diventa $y^2 = a - 1$, per cui troviamo i punti

$$P_1 = (1, -\sqrt{a-1}), \quad P_2 = (1, \sqrt{a-1})$$

definiti per i valori del parametro $a \geq 1$. Se invece $y = 0$, la condizione $f_x = 0$ diventa $3x^2 - 2x - 1 = 0$, da cui troviamo altri due punti

$$P_3 = \left(\frac{1 - \sqrt{1+3a}}{3}, 0 \right), \quad P_4 = \left(\frac{1 + \sqrt{1+3a}}{3}, 0 \right),$$

che sono definiti per ogni $a > 0$. Osserviamo anche che quando $a = 1$ i tre punti P_1, P_2 e P_4 coincidono e valgono $(1, 0)$.

Per studiare la natura dei punti critici calcoliamo le derivate seconde

$$f_{xx}(x, y) = 6x - 2, \quad f_{xy}(x, y) = 2y, \quad f_{yy}(x, y) = 2x - 2.$$

Nei punti P_1, P_2 troviamo

$$\nabla^2 f(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 4 & \pm 2\sqrt{a-1} \\ \pm 2\sqrt{a-1} & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è in entrambi i casi $-4(a-1)$, che è negativo per $a > 1$ e nullo per $a = 1$ (ricordiamo che per $a < 1$ i punti non sono definiti). I due punti sono quindi entrambi punti di sella per $a > 1$, mentre il caso $a = 1$ è dubbio e andrà studiato separatamente.

Nel punto P_3 troviamo

$$\nabla^2 f(P_3) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+3a} & 0 \\ 0 & \frac{-4-2\sqrt{1+3a}}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice è diagonale, quindi ricaviamo tutte le informazioni guardando il segno degli elementi della diagonale, senza bisogno di calcolare determinante e traccia. In questo caso,

essendo $\sqrt{1+3a} > 1$ per ogni $a > 0$, gli elementi sono evidentemente entrambi negativi. Quindi la matrice è definita negativa per ogni $a > 0$ e il punto è di massimo.

In P_4 troviamo invece

$$\nabla^2 f(P_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3a} & 0 \\ 0 & \frac{-4+2\sqrt{1+3a}}{3} \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso è sufficiente studiare il segno dei singoli termini. Il primo termine della diagonale è positivo per ogni $a > 0$. Il secondo termine invece è positivo/nullo/negativo, a seconda che

$$-4 + 2\sqrt{1+3a} \gtrless 0 \iff \sqrt{1+3a} \gtrless 2 \iff 1+3a \gtrless 4.$$

Quindi la matrice è definita positiva (e il punto è di minimo) per $a > 1$, semidefinita positiva (e il punto è dubbio) per $a = 1$, indefinita (e il punto non è né di max né di min) per $0 < a < 1$.

(NB Alle stesse conclusioni, con un maggiore rischio di perdersi nei calcoli, si arriva studiando determinante e traccia della matrice hessiana dei punti P_3 e P_4 .)

Restano da studiare i casi dubbi, che in realtà si riferiscono tutti allo stesso punto $P_1 = P_2 = P_4 = (0, 1)$ quando $a = 1$. In questo caso la funzione ha la forma $f(x, y) = (x-1)(x^2 + y^2 - 1)$. Se si studia la f lungo una retta generica per il punto $(0, 1)$ si trova un minimo stretto in tutte le direzioni tranne quella della retta verticale $x \equiv 1$, dove la funzione è identicamente nulla. Questo non consente di concludere nulla. Se invece si studia il segno dell'incremento

$$f(x, y) - f(0, 1) = f(x, y) = (x-1)(x^2 + y^2 - 1)$$

attraverso il segno dei due fattori, si trova che:

$f(x, y) - f(0, 1)$ è positivo a destra della retta $x = 1$ e all'interno del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1,

$f(x, y) - f(0, 1)$ è negativo altrove.

Da un disegno si vede chiaramente che ogni intorno di $(0, 1)$ interseca sia la regione dove l'incremento è positivo che quella dove l'incremento è negativo. Quindi il punto non è né di max né di min.

(NB Volendo essere più formali, si possono considerare ad esempio parabole comprese tra la retta $x = 1$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, del tipo cioè $x = 1 - cy^2$ con $c > 0$ abbastanza piccolo. Lungo tali parabole troviamo

$$f(1 - cy^2, y) = -cy^2[(1 - 2c)y^2 + c^2y^4] = -c(1 - 2c)y^4 - c^3y^6,$$

che ha un massimo stretto per $y = 0$ per ogni fissato $0 < c \leq 1/2$, mentre un minimo quando $c > 1/2$.)

In conclusione:

per $0 < a = 1$, f ha due punti critici:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1+3a}}{3}, 0\right) \text{ di max; } \left(\frac{1 + \sqrt{1+3a}}{3}, 0\right) \text{ né di max né di min}$$

per $a > 1$, f ha quattro punti critici

$$\left(\frac{1 - \sqrt{1+3a}}{3}, 0\right) \text{ di max; } \left(\frac{1 + \sqrt{1+3a}}{3}, 0\right) \text{ di min; } (0, \pm\sqrt{a-1}) \text{ né di max né di min.}$$

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq -x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = 2y^2$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Svolgimento Il dominio può essere descritto essenzialmente in due modi diversi: si possono usare coordinate polari centrate nell'origine oppure traslate con centro in $(0, 1)$. Per la funzione del punto (a) è conveniente la seconda opzione, mentre quella del punto (b) si integra più facilmente con le coordinate centrate nell'origine.

(a) Possiamo scrivere $E = S \cup T$, dove S è costituito da tre quarti di cerchio e T dal triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. In coordinate polari traslate $x = \rho \cos \theta$, $y = 1 + \rho \sin \theta$, troviamo

$$\iint_S y^2 dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^1 (1 + \rho \sin \theta)^2 \rho d\rho = \frac{15}{8}\pi + \frac{4}{3}.$$

Per l'integrale su T utilizziamo invece le coordinate cartesiane

$$\iint_T y^2 dx dy = \int_0^1 dy \int_{-y}^0 2y^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Sommando i contributi, troviamo che l'integrale richiesto vale $\frac{15}{8}\pi + \frac{11}{6}$.

(b) In questo caso usiamo le coordinate polari (non traslate) $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. In questo modo, l'intero dominio (senza bisogno di scomporre in due parti) si scrive come

$$\theta \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right], \quad 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta.$$

Troviamo

$$\iint_E \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} \frac{\rho \sin \theta}{\rho} \rho d\rho = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{6}.$$

NB E' possibile anche per questa funzione utilizzare la descrizione del dominio del punto (a), ma i calcoli sono più lunghi. Si sottolinea in particolare che, in coordinate polari traslate, l'espressione $\sqrt{x^2 + y^2}$ non è uguale a ρ ma a $\sqrt{\rho^2 + 2\rho \sin \theta + 1}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(1 + x \sin x^2) \mathbf{i} - y(\alpha x + \cos x^2) \mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Svolgimento (a) Il campo è definito su tutto il piano, quindi è conservativo se e solo se è irrotazionale. Svolgendo le derivate, si trova che ciò è verificato per $\alpha = -2$. Il potenziale si calcola con i metodi standard e vale, a meno di costanti, $U = y^2 x - \frac{1}{2} y^2 \cos x^2$.

(b) Per un α generale, il campo non è conservativo e l'integrale non può essere semplicemente calcolato come differenza di potenziale. E' possibile tuttavia utilizzare il risultato della prima parte scomponendo il campo come somma di un termine conservativo più un resto. Il modo più semplice è scrivere $\mathbf{F} = \mathbf{F}^* - (2 + \alpha)xy\mathbf{j}$, dove $\mathbf{F}^*$ è il campo $\mathbf{F}$ quando $\alpha = -2$. Troviamo allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\gamma} \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{x} - (\alpha + 2) \int_{\gamma} xy dy \\ &= U(\gamma(\pi/2)) - U(\gamma(0)) - (\alpha + 2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt \\ &= -\frac{1}{2} - (\alpha + 2)\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

NB Sono ugualmente possibili altre scomposizioni, ad es. $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ con

$$\mathbf{G} = y^2 x \sin x^2 \mathbf{i} - y \cos x^2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{H} = y^2 \mathbf{i} - \alpha xy \mathbf{j}.$$

In questo caso va tenuto conto che il potenziale di $\mathbf{G}$ non è più lo stesso del punto (a) ma è invece $U_G(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 \cos x^2$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi].$$

- (a) Calcolare l'area di Σ .
- (b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione).
- (c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

Svolgimento Troviamo

$$\sigma_u \times \sigma_v(u, v) = (4 \sin^2 u \cos v, 4 \sin^2 u \sin v, 4 \cos u \sin u),$$

la cui norma risulta pari a $4 \sin u$. L'area di Σ è quindi

$$A(\Sigma) = \int_0^{\pi/3} du \int_0^{2\pi} 4 \sin u dv = 4\pi.$$

Calcolando il flusso richiesto con la definizione troviamo

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \langle F, \hat{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{\pi/3} du \int_0^{2\pi} [(16 + 8) \sin^3 u \sin v \cos v - 8 \cos^2 u \sin u] dv \\ &= \int_0^{\pi/3} -16\pi \cos^2 u \sin u du = -\frac{14}{3}\pi.\end{aligned}$$

Per calcolare lo stesso flusso col teorema della divergenza, osserviamo che Σ è data dalla porzione di superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$. Chiamiamo allora Ω la corrispondente porzione della sfera piena, cioè poniamo $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$. Allora è facile vedere che $\partial\Omega = \Sigma \cup D$, dove D è il cerchio nel piano $z = 1$, di centro $(0, 0, 1)$ e raggio $\sqrt{3}$ nelle x, y . La normale esterna a

Ω ha lo stesso verso di $\sigma_u \times \sigma_v$ su Σ , mentre coincide con $-\hat{k}$ sul disco D . Il teorema della divergenza ci dà quindi

$$\int \int_{\Sigma} \langle F, \hat{n} \rangle d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz + \iint_D \langle \mathbf{F}, \hat{k} \rangle d\sigma.$$

Il dominio Ω , come spesso visto negli esercizi con sfere tagliate da piani orizzontali, si descrive convenientemente in coordinate cilindriche (NB non sferiche) come $z \in [1, 2], \rho \in [0, \sqrt{4-z^2}], \theta \in [0, 2\pi]$. Troviamo che la divergenza di $\mathbf{F}$ è costante e pari a -1 , pertanto

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = - \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\theta = - \int_1^2 \pi(4-z^2) dz = -\frac{5}{3}\pi.$$

Per quanto riguarda il flusso attraverso D , troviamo che $\langle \mathbf{F}, \hat{k} \rangle = -z \equiv -1$ su D . Quindi il termine da aggiungere è pari a meno l'area di D , cioè -3π . Sommando i due contributi, ritroviamo il risultato di $-(14/3)\pi$ trovato nel punto precedente.

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n^2+1} - n \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Svolgimento (a) Utilizziamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Concludiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{e} \cdot 0 = 0,$$

e la serie converge, perché il limite del rapporto è minore di 1.

(b) Posto $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$, se verifichiamo che $a_n \rightarrow 0$ e che è decrescente, allora il criterio di Leibniz darà la convergenza della serie. Possiamo procedere in due modi.

Primo modo: per "razionalizzazione". Scriviamo

$$a_n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

La quantità $\sqrt{n^2+1} + n$ è chiaramente crescente e tende a $+\infty$, quindi a_n , che è il suo reciproco, è decrescente e tende a zero.

Secondo modo: usando lo sviluppo al primo ordine di $\sqrt{1+x}$. Abbiamo

$$a_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right) = n \left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$$

Studiamo ora la monotonia (NB la monotonia NON segue dall'equivalenza asintotica con $1/(2n)$). A questo scopo, poniamo $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ e studiamo il segno della derivata. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Poichè per ogni $x > 0$ vale $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = x$, la derivata è negativa e questo prova che a_n è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz.

NB Non è un'argomentazione valida scrivere che, poiché $\sqrt{n^2 + 1} \approx n$, allora $\sqrt{n^2 + 1} - n \approx n - n = 0$. E' necessario in queste situazioni studiare il termine successivo dello sviluppo di $\sqrt{n^2 + 1}$ per essere sicuri che vada a zero (come dovrebbe essere ben noto dalla teoria dei limiti fatta ad Analisi I).

(c) Usando gli sviluppi di Taylor, si trova che

$$\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

quindi i termini della serie sono asintotici (a meno di una costante moltiplicativa) a $\frac{1}{n^{3/2}}$. La serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ è una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno, quindi convergente, e pertanto anche la serie richiesta converge per il criterio del confronto asintotico.

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = -10e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Svolgimento Chiamando $Y(p)$ la trasformata di Laplace di $y(x)$, si trova

$$(p^2 - 2p + 5)Y + p - 1 = -\frac{10}{p - 2}$$

da cui

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-p^2 + 3p - 12}{(p - 2)(p^2 - 2p + 5)} \\ &= -\frac{2}{p - 2} + \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 2^2} + \frac{2}{(p - 1)^2 + 2^2}. \end{aligned}$$

Antitrasformando, si trova che $y(x) = -2e^{2x} + e^x(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 2

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = y[x^2 + (y-1)^2 - a]$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

Risposta: Per $0 < a = 1$, f ha due punti critici:

$$\left(0, \frac{2 + \sqrt{1+3a}}{3}\right) \text{ di min; } \left(0, \frac{2 - \sqrt{1+3a}}{3}\right) \text{ né di max né di min}$$

per $a > 1$, f ha quattro punti critici

$$\left(0, \frac{2 + \sqrt{1+3a}}{3}\right) \text{ di min; } \left(0, \frac{2 - \sqrt{1+3a}}{3}\right) \text{ di max; } (\pm\sqrt{a-1}, 0) \text{ né di max né di min.}$$

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = x^2 - 1$. **Risposta:** $\frac{3}{16}\pi + \frac{5}{12}$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **Risposta:** $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(1 + xe^{x^2})\mathbf{i} + y(\alpha x + e^{x^2})\mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$. **Risposta:** $\alpha = 2, U(x, y) = y^2x + \frac{1}{2}y^2e^{x^2}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi/2]$. **Risposta: l'integrale vale** $\frac{2\alpha - 1}{6}$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ . **Risposta: l'area vale** $9\pi(2 - \sqrt{2})$.

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = \frac{y}{3}\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione). **Risposta: il flusso vale** $\frac{9}{2}\pi(4 - \sqrt{2})$.

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{6n}} - \sqrt{n} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Risposta: (a) converge per il crit. del rapporto, (b) converge per il crit. di Leibniz, (c) converge per confronto asintotico.

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = -10e^{-2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risposta: $y(x) = e^{-x}(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x) - 2e^{-2x}$

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 3

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = x[(x-1)^2 + y^2 - a]$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

Risposta: Per $0 < a = 1$, f ha due punti critici:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{1 + 3a}}{3}, 0\right) \text{ di min; } \left(\frac{2 - \sqrt{1 + 3a}}{3}, 0\right) \text{ né di max né di min}$$

per $a > 1$, f ha quattro punti critici

$$\left(\frac{2 + \sqrt{1 + 3a}}{3}, 0\right) \text{ di min; } \left(\frac{2 - \sqrt{1 + 3a}}{3}, 0\right) \text{ di max; } (0, \pm\sqrt{a-1}) \text{ né di max né di min.}$$

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \geq x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = y^2$. **Risposta:** $\frac{15}{16}\pi + \frac{11}{12}$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **Risposta:** $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(\alpha + x \sin x^2)\mathbf{i} - y(x + \cos x^2)\mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$. **Risposta:** $\alpha = -1/2, U(x, y) = -\frac{y^2}{2}(x + \cos(x^2))$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Risposta: l'integrale vale $-\frac{4\alpha + 5}{6}$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ . **Risposta:** l'area vale $4\pi(2 - \sqrt{2})$.

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \sqrt{2}z\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione). **Risposta:** il flusso vale $\frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$.

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(2n)!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[n - \sqrt{n^2 - 1} \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n}}.$$

Risposta: (a) diverge per il crit. del rapporto, (b) converge per il crit. di Leibniz, (c) converge per confronto asintotico.

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risposta: $y(x) = 2e^{2x} - e^x(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x)$.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 4

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = (1 - y)(x^2 + y^2 - a)$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

Risposta: per $0 < a = 1$, f ha due punti critici:

$$\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 3a}}{3}\right) \text{ di min; } \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 3a}}{3}\right) \text{ né di max né di min}$$

per $a > 1$, f ha quattro punti critici

$$\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 + 3a}}{3}\right) \text{ di min; } \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 3a}}{3}\right) \text{ di max; } (\pm\sqrt{a-1}, 0) \text{ né di max né di min.}$$

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq -x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = 1 - x^2$. **Risposta:** $-\frac{3}{16}\pi - \frac{5}{12}$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. **Risposta:** $\frac{4}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = xy(1 + ye^{x^2})\mathbf{i} + (\alpha x^2 + ye^{x^2})\mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$. **Risposta:** $\alpha = 1/2$, $U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y + y^2e^{x^2})$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$. **Risposta:** l'integrale vale $\frac{4\alpha + 1}{6}$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ . **Risposta:** l'area vale 9π .

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = \frac{2y}{9}\mathbf{i} - \frac{x}{3}\mathbf{j} + \frac{z}{3}\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione). **Risposta:** il flusso vale $\frac{21}{4}\pi$.

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n^2 + 1} - n \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Risposta: (a) diverge per il crit. del rapporto, (b) converge per il crit. di Leibniz, (c) converge per confronto asintotico.

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = 10e^{-2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

Risposta: $y(x) = -e^{-x}(\cos 2x - \sin 2x) + 2e^{-2x}$