UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 8.XI.2022

NB gli argomenti di questa lista non faranno parte dell'esame scritto, gli esercizi servono come supporto allo studio della teoria

1. In ciascuno dei seguenti casi, determinare la parte interna $\overset{\circ}{\Omega}$, la frontiera $\partial\Omega$ e la chiusura $\overline{\Omega}$ degli insiemi indicati, e dire Ω è aperto, chiuso o né l'una né l'altra cosa.
   (a) $\Omega = (0,1) \cup (2,+\infty)$.
   (b) $\Omega = [0,1)$.
   (c) $\Omega = [0,1] \cup \{2\} \cup [3,\infty)$.
   (d) $\Omega = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (e) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$.
   (f) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$.
   (g) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0,1), y = 0\}$ (NB confrontare con (b)).
   (h) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x, y \text{ razionali}\}$.
   (i) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \neq 0, y = \text{ sen } \frac{1}{x}\}$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \notin \Omega$. Mostrare che $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ se e solo se $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per Ω. Dedurne che

$$\Omega \cup \partial\Omega = \Omega \cup \{\text{punti di accumulazione di } \Omega\}.$$

3. Mostrare che l'intersezione e l'unione di due insiemi aperti (risp. chiusi) sono ancora insiemi aperti (risp. chiusi).

4. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $c \in \mathbb{R}$. Mostrare che gli insiemi

$$A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{x}) < c\}, \qquad A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{x}) > c\}$$

sono aperti, mentre gli insiemi

$$C_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{x}) \leq c\},\ C_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{x}) \geq c\},\ C_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{x}) = c\}$$

sono chiusi.

Mostrare inoltre che $\partial A_1 \subset C_3$. Si può dire che in generale $\partial A_1 = C_3$?

5. Usando la definizione di limite, mostrare che le seguenti funzioni tendono a 0 per $(x, y) \to (0, 0)$.

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 e^y + x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^4}}$.

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + \sqrt[3]{y} \operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$.

6. Mostrare che le seguenti funzioni non hanno limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}$.

   (b) $f(x, y) = \dfrac{y^3 + x^2 y}{x^4 + y^2}$.

   (Suggerimento: studiare il limite lungo la retta generica $y = ax$ o lungo le parabole $y = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$).

7. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Mostrare che $f(x, y)$ possiede le derivate parziali in tutti i punti (compreso $(0, 0)$), ma che non è continua in $(0, 0)$. Verificare che le derivate parziali di f non sono continue in $(0, 0)$.

8. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y + y^4}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Mostrare che $f(x, y)$ possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ e che valgono tutte zero. Mostrare che f non è continua in $(0, 0)$. (Suggerimento: per mostrare che f non è continua, studiare il limite lungo le curve della forma $y = ax^3$, con $a \in \mathbb{R}$).

9. Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema di Rolle*). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$, che assume un valore costante su tutti i punti di ∂D. Allora esiste $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

10. Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema del valor medio di Lagrange*). Sia $f \in C^1(D)$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ tali che il segmento di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sia contenuto in D. Mostrare che si ha

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$$

per un opportuno punto ξ appartenente al segmento di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. (Suggerimento: considerare la funzione $\phi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$, con $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ e applicare il teorema di Lagrange in una variabile a ϕ nell'intervallo $t \in [0, 1]$).

11. Mostrare che, se $n > 2$, allora una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ può avere un punto critico dove la matrice hessiana ha determinante e traccia positivi senza che il punto sia di minimo.

12. Sia $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$. Mostrare che, presa qualunque retta passante per $(0, 0)$, la restrizione di f su quella retta ha un minimo locale in $(0, 0)$ (cioè, per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $t \to f(at, bt)$ ha un minimo locale per $t = 0$). Mostrare che $(0, 0)$ non è di minimo locale per f. (sugg. mostrare che la restrizione di $f(x, y)$ lungo la parabola $y = \frac{3}{2}x^2$ non ha un minimo in $(0, 0)$.

13. Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x, y)$. Mostrare che f è una funzione convessa (suggerimento: ricordarsi della disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla norma).

14. Sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^1, con $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso. Mostrare che, se $\mathbf{x}$ è un punto critico per f, allora $\mathbf{x}$ è un punto di minimo assoluto per f.