

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 16.X.2021

1. In ciascuno dei seguenti casi, dire se l'insieme Ω è aperto, chiuso o né l'una né l'altra cosa, e determinare la sua frontiera $\partial\Omega$, la sua parte interna $\overset{\circ}{\Omega}$ e la sua chiusura $\overline{\Omega}$.

(a) $\Omega = (0, 1) \cup (2, +\infty)$

(b) $\Omega = [0, 1)$

(c) $\Omega = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$

(d) $\Omega = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(e) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 < y \leq 1\}$

(f) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = 0\}$

(g) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{ razionali} \}$

(h) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \notin \Omega$. Mostrare che $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ se e solo se $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per Ω .

3. Mostrare che l'intersezione e l'unione di due insiemi aperti (risp. chiusi) sono ancora insiemi aperti (risp. chiusi).

4. Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $c \in \mathbb{R}$. Mostrare che gli insiemi

$$A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) < c\}, \quad A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > c\}$$

sono aperti, mentre gli insiemi

$$C_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq c\}, \quad C_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq c\}, \quad C_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$$

sono chiusi.

5. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostrare che $f(x, y)$ possiede le derivate parziali in tutti i punti (compreso $(0, 0)$), ma che non è continua in $(0, 0)$. Verificare che le derivate parziali di f non sono continue in $(0, 0)$.

6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostrare che $f(x, y)$ possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ e che valgono tutte zero. Mostrare che f non è continua in $(0, 0)$.

7. Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema di Rolle*). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$, che assume un valore costante su tutti i punti di ∂D . Allora esiste $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

8. Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema del valor medio di Lagrange*). Sia $f \in C^1(D)$, con $D \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e siano $x, y \in D$ tali che il segmento di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sia contenuto in D . Mostrare che si ha

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\xi), y - x \rangle$$

per un opportuno punto ξ appartenente al segmento di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. (Suggerimento: considerare la funzione $\phi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$, con $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ e applicare il teorema di Lagrange in una variabile a ϕ nell'intervallo $t \in [0, 1]$).

9. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$. Supponiamo che $f > 0$ su $\overset{\circ}{D}$, che $f \equiv 0$ su ∂D e che esista un unico punto $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ critico per f . Mostrare che $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo locale per f .

10. Trovare i punti di max e min locale per la funzione $f(x, y) = (x^2 - y)(x^2 + y)(y - 3)$. (Suggerimento: per studiare la natura del punto critico $(0, 2)$, utilizzare il risultato dell'esercizio precedente, con una scelta opportuna dell'insieme D).

11. Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x, y)$. Mostrare che f è una funzione convessa (suggerimento: ricordarsi della disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla norma).

12. Sia $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^1 , con $C \subset \mathbb{R}^n$ convesso. Mostrare che, se $\mathbf{x}$ è un punto critico per f , allora $\mathbf{x}$ è un punto di minimo assoluto per f .

13. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 . Sia $\mathbf{x}_0$ un punto critico per f tale che $\nabla^2 f(x)$ sia semidefinito positivo per tutti gli $\mathbf{x}$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$. Mostrare che $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo locale per f . Applicare questo criterio per mostrare che la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - y^4$$

ha un minimo locale nell'origine.

14. Mostrare che, se $n > 2$, allora una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ può avere un punto critico dove la matrice hessiana ha determinante e traccia positivi senza che il punto sia di minimo.
15. Dire se le seguenti proprietà sono vere o false. Nel seguito, è sottinteso che f è una funzione di classe C^2 su un insieme di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, e che $\mathbf{x}$ è un punto interno al dominio di f .
- (a) Se in un punto x la funzione f ha matrice hessiana definita positiva, allora x è di minimo per f , indipendentemente dal valore di ∇f in x .
 - (b) Se in un punto x la funzione f ha matrice hessiana indefinita, allora x non è né di massimo né di minimo per f , indipendentemente dal valore di ∇f in x .
 - (c) Se una matrice simmetrica $n \times n$ ha determinante e traccia positivi, allora è definita positiva, qualunque sia $n \geq 2$.
 - (d) Se una matrice simmetrica $n \times n$ è definita positiva, allora ha determinante e traccia positivi, qualunque sia $n \geq 2$.
 - (e) Se in un punto $\mathbf{x}$ la funzione f ha gradiente nullo e matrice hessiana semidefinita positiva, allora non esistono rette passanti per x lungo cui f abbia un massimo stretto in $\mathbf{x}$.
 - (f) Una funzione convessa (non costante) non può avere punti di massimo interni al dominio.