UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 26.X.2021

1. Per ciascuno dei casi seguenti, si denoti con Γ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data e si dica quali tra i punti P_1, P_2, P_3 appartengono a Γ . Per i punti che appartengono, si dica se sono regolari (cioè se il teorema di Dini garantisce la locale esplicitabilità rispetto a una delle due variabili) e in caso affermativo si calcoli l'equazione cartesiana della retta tangente a Γ nel punto.

(a) $x^4 - 3x^2 - y^2 - 2yx + 1 = 0$; $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, -1), P_3 = (0, 1)$.

(b) $e^x(y^2 - x - 2) = 0$; $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 1), P_3 = (2, 2)$.

(c) $x^2 + e^{xy} - (x - y)^2 = 1$; $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (1, 1)$.

(d) $2x^5 + 3xy^2 = 14$; $P_1 = (1, 1), P_2 = (1, 2), P_3 = (1, -2)$.

2. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se l'insieme Γ dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data è una curva regolare e, in caso contrario, determinare i punti non regolari di Γ :

(a) $x^4 - y^2 = 1$;

(b) $x^4 - y^2 = 0$;

(c) $x^2 - 4x + y^3 - 3y = 0$;

(d) $y^4 - x^2 + 4x = 4$.

3. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ sulla curva assegnata.

(a) $f(x, y) = y - x^2$ sulla curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

(b) $f(x, y) = x^3 + y^3$ sulla curva di equazione $x^4 + y^4 = 1$.

(c) $f(x, y) = y^2 - 3x$ sulla curva di equazione $x^2 + 9y^2 = 1$.

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8y$ sulla curva di equazione $x^2 + 4x + y^2 = 1$.

(e) $f(x, y) = (x - 1)^2 - 6y$ sulla curva di equazione $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

4. Al variare del parametro $a \geq 0$, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = y + ax^2$ sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

5. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme Ω .

(a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(c) $f(x, y) = x - 2y$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

(d) $f(x, y) = x - x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 9\}$.

(e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Sia $f(x, y) = 1 + x^4(2 - y) + y^2$.

(a) Trovare i punti di max/min locale di f su $\mathbb{R}^2$.

(b) Trovare il max e il min assoluto di f su $\Omega = \{(x, y) : 2x^4 + y^2 \leq 48\}$.

(c) Alla luce del risultato di (b), dire se i punti di estremo trovati in (a) sono solo locali o anche assoluti.

7. Fissato $R > 0$, sia $C_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ il cerchio di centro l'origine e raggio R . Determinare, a seconda del valore di R , il massimo e minimo assoluto su C_R della funzione $f(x, y) = 4x - x^2 - 3y - y^2$.

8. Fissato $R > 0$, sia $C_R = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Determinare, a seconda del valore di R , il massimo e minimo assoluto su C_R della funzione $f(x, y) = x^2 - 4y + y^2$.

9. Sia $f(x, y) = x(x+3) + y^2 - 4(y+1)$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

(a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ .

(b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

10. Sia $f(x, y) = y^2 - x$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$.

(a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ .

(b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 - 4x \leq 0\}$.

11. (a) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ sull'insieme degli $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

(b) Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sull'insieme degli $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Vedere anche i §1D, 1E del libro di Marcellini-Sbordone, e il §2.3 del libro di Salsa-Squellati