

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) ai quesiti degli esercizi dell'8.X.2021

1. (a) Piano tangente: $z = -x + 3$; la derivata direzionale vale 1.
(b) Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(13x - 5y - 7)$; la derivata direzionale vale $3/4$.
(c) Piano tangente: $z = \frac{2}{3}(x + y) + 1$; la derivata direzionale vale 0.
(d) Piano tangente: $z = -2x + y + 4$; la derivata direzionale vale -1 .
(e) Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(-2x + 2y + \pi)$; la derivata direzionale vale -1 .
(f) Piano tangente: $z = \frac{x}{2} + 2y - \ln 2 - 2$; la derivata direzionale vale -1 .
2. (a) $(0, \frac{1}{2})$ sella.
(b) $(0, 0)$ sella, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ minimo.
(c) $(0, 0)$ minimo, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sella, $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sella.
(d) $(0, 0)$ sella.
(e) $(0, 0)$ sella, $(0, -1)$ sella, $(-1, 0)$ sella, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ massimo.
(f) $(2, 0)$ massimo.
(g) $(0, 0)$ sella, $(2, 0)$ minimo, $(-2, 0)$ minimo.
(h) $(4, 2)$ minimo.
3. (a) $(1, 1, 1)$ massimo
(b) $(1, 1, -\frac{1}{2})$ sella
(c) $(0, 0, 0)$ sella, $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ sella, $(-1, -1, 1/\sqrt{2})$ sella.
(d) $(0, 0, 0)$ minimo, $(0, -1, -1)$ sella, $(0, -1, 1)$ sella.
(e) $(1, 1, 1)$ massimo, $(-1, -1, -1)$ minimo.
4. La restrizione di f su una retta generica per $(0, 0)$ ha la forma $f(at, bt) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$. Per $t = 0$ questa quantità ha derivata prima nulla e derivata seconda pari a b^2 ; quindi, se $b \neq 0$, ha un minimo. Per $b = 0$, la funzione vale a^4t^4 , che ha anch'essa un minimo per $t = 0$. Quindi la funzione ha un minimo in $(0, 0)$ lungo ogni retta.

Studiamo invece il segno dell'incremento di f vicino a $(0, 0)$, che coincide col segno di f essendo $f(0, 0) = 0$. La funzione f si annulla lungo le due parabole $y = 2x^2$ e $y = x^2$. E' positiva al di sopra della parabola $y = 2x^2$ e al di sotto della parabola $y = x^2$, mentre è negativa nella regione tra le due parabole. Pertanto, ogni intorno dell'origine contiene sia punti con f positiva che punti con f negativa. Ne segue che $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo.

In alternativa, si può osservare (guidati dalle considerazioni appena fatte) che la restrizione della funzione lungo una parabola intermedia tra le due, cioè della forma $y = ax^2$ per un $1 < a < 2$ soddisfa

$$f(x, ax^2) = (a - 2)(a - 1)x^2,$$

e quindi ha un massimo per $x = 0$, essendo $(a - 2)(a - 1) < 0$ quando $1 < a < 2$. Poiché troviamo un minimo stretto lungo le rette, e un massimo stretto lungo le parabole appena considerate, il punto non è né di massimo né di minimo.

5. Per tutte le funzioni proposte, si verifica che l'origine è un punto critico con hessiano a determinante nullo, e quindi le derivate non danno informazioni per concludere. Studiando il comportamento della funzione con altri metodi (es. restrizioni lungo le rette, studio diretto del segno dell'incremento) si trovano i risultati seguenti.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) massimo assoluto, non stretto | (b) né massimo né minimo |
| (c) né massimo né minimo | (d) minimo relativo (non assoluto), non stretto |
| (e) massimo assoluto, non stretto | (f) né massimo né minimo |
| (g) né massimo né minimo | (h) massimo relativo, non stretto |
| (i) minimo assoluto, stretto | (l) massimo assoluto, stretto in un intorno |
| (m) né massimo né minimo | (n) minimo assoluto, non stretto |
| (o) né massimo né minimo | (p) né massimo né minimo |
| (q) massimo relativo, non stretto | (r) né massimo né minimo. |

6. Analogamente all'esercizio precedente, si trova:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| (a) minimo | (b) né massimo né minimo |
| (c) minimo | (d) né massimo né minimo |
| (e) né massimo né minimo | (f) massimo |
| (g) minimo | (h) né massimo né minimo. |

7. (a) $(0, 0)$ né max né min, $(-1, -1)$ min, $(1, 1)$ min.
 (b) $(0, 0)$ min, $(4, \sqrt{2})$ né max né min, $(4, -\sqrt{2})$ né max né min.
 (c) $(0, 0)$ né max né min, $(\frac{3}{4}, 0)$ min, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ né max né min, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ né max né min.
 (d) $(0, 0)$ né max né min, $(1, 0)$ né max né min, $(0, 1)$ né max né min, $(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$ massimo.
 (e) $(0, 0)$ min, $(1, \frac{1}{2})$ né max né min, $(-1, \frac{1}{2})$ né max né min.
8. (a) Per $\lambda = 2$ il punto è di minimo, per gli altri λ non è critico (quindi né di massimo né di minimo).
 (b) Il punto è critico per $\lambda = 0, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$. Per $\lambda = 0$ la funzione è identicamente nulla, e il punto è banalmente sia di massimo che di minimo. Per $\lambda = -1/\sqrt{3}$ il punto è di massimo, mentre per $\lambda = 1/\sqrt{3}$ è di minimo.
 (c) P_1 è di minimo, P_2 non è critico (quindi né di massimo né di minimo), P_3 è critico e non è né di massimo né di minimo.
 (d) P_1 non è critico (quindi né di massimo né di minimo), P_2 è di minimo, P_3 è critico e non è né di massimo né di minimo.
 (e) L'origine è critico ma non è né di massimo né di minimo per f , non è critico per g (quindi né di massimo né di minimo), è di massimo per h .
 (f) Il punto $(0, 1)$ è di massimo per f , non è critico per g (quindi né di massimo né di minimo), è di massimo per h .