UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) ai quesiti degli esercizi del 7.XI.2019

1. (a) Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(13x - 5y - 7)$; la derivata direzionale vale 3/4.
   (b) Piano tangente: $z = \frac{2}{3}(x + y) + 1$; la derivata direzionale vale 0.
   (c) Piano tangente: $z = -2x + y + 4$; la derivata direzionale vale -1.
   (d) Piano tangente: $z = \frac{1}{4}(-2x + 2y + \pi)$; la derivata direzionale vale -1.

2. (a) $(0, \frac{1}{2})$ sella.
   (b) $(0, 0)$ sella, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ minimo.
   (c) $(0, 0)$ minimo, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sella, $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sella.
   (d) $(0, 0)$ sella.
   (e) $(0, 0)$ sella, $(0, -1)$ sella, $(-1, 0)$ sella, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ massimo.
   (f) $(2, 0)$ massimo.
   (g) $(0, 0)$ sella, $(2, 0)$ minimo, $(-2, 0)$ minimo.
   (h) $(4, 2)$ minimo

3. (a) $(1, 1, 1)$ massimo
   (b) $(1, 1, -\frac{1}{2})$ sella
   (c) $(0, 0, 0)$ sella, $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ sella, $(-1, -1, 1/\sqrt{2})$ sella.
   (d) $(0, 0, 0)$ minimo, $(0, -1, -1)$ sella, $(0, -1, 1)$ sella.

4. La restrizione di f su una retta generica soddisfa $f(at, bt) = 2a^4t^4 - 3a^2bt^3 + b^2t^2$. Per $t = 0$ questa quantità ha derivata prima nulla e derivata seconda pari a b^2; quindi, se $b \neq 0$, ha un minimo. Per $b = 0$, la funzione vale a^4t^4, che ha anch'essa un minimo per $t = 0$. Quindi la funzione ha un minimo su ogni retta.

   D'altra parte, è facile studiare il segno di f. La funzione si annulla lungo le due parabole $y = 2x^2$ e $y = x^2$ (in particolare, nell'origine). E' positiva al di sopra della parabola $y = 2x^2$ e al di sotto della parabola $y = x^2$, mentre è negativa nella regione tra le due parabole. Pertanto, ogni intorno dell'origine contiene sia punti con f positiva che punti con f negativa. Ne segue che $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo.

   In alternativa, si può osservare (guidati dalle considerazioni appena fatte) che la restrizione della funzione lungo una parabola intermedia tra le due, cioè della forma $y = ax^2$ per un $1 < a < 2$ soddisfa
   $$f(x, ax^2) = (a - 2)(a - 1)x^2,$$
   e quindi ha un massimo per $x = 0$, essendo $(a - 2)(a - 1) < 0$ quando $1 < a < 2$. Poiché troviamo un minimo stretto lungo le rette, e un massimo lungo le parabole appena considerate, il punto non è né di massimo né di minimo.

5. Per tutte le funzioni proposte, si verifica che l'origine è un punto critico con hessiano a determinante nullo, e quindi le derivate non danno informazioni per concludere. Studiando il comportamento della funzione con altri metodi (es. restrizioni lungo le rette, studio diretto del segno dell'incremento) si trovano i risultati seguenti.

(a) massimo assoluto, non stretto	(b) né massimo né minimo
(c) né massimo né minimo	(d) minimo relativo (non assoluto), non stretto
(e) massimo assoluto, non stretto	(f) né massimo né minimo
(g) né massimo né minimo	(h) massimo relativo, non stretto
(i) minimo assoluto, stretto	(l) massimo assoluto, stretto in un intorno
(m) né massimo né minimo	(n) minimo assoluto, non stretto
(o) né massimo né minimo	(p) né massimo né minimo
(q) massimo relativo, non stretto	(r) né massimo né minimo.

6. Analogamente all'esercizio precedente, si trova:

(a) minimo	(b) né massimo né minimo
(c) minimo	(d) né massimo né minimo
(e) né massimo né minimo	(f) massimo
(g) minimo	(h) né massimo né minimo.

7. (a) $(0,0)$ min, $(4,\sqrt{2})$ né max né min, $(4,-\sqrt{2})$ né max né min.
   (b) $(0,0)$ né max né min, $(\frac{3}{4},0)$ min, $(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{8}})$ max , $(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{8}})$ max, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ né max né min, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ né max né min.
   (c) $(0,0)$ né max né min, $(0,2)$ max, $(\sqrt{3},3)$ né max né min, $(-\sqrt{3},3)$ né max né min.
   (d) $(0,0)$ min, $(1,\frac{1}{2})$ né max né min, $(-1,\frac{1}{2})$ né max né min.

8. (a) Se $a \neq 0$, l'unico punto critico è $(0,1)$, ed è un minimo quando $a > 0$ mentre non è né massimo né minimo quando $a < 0$. Se $a = 0$, tutti i punti della retta $x + y = 1$ sono critici, e sono tutti di minimo (assoluto) per f.
   (b) Se $a > 0$ ci sono tre punti critici: $(0, \frac{a}{2})$ di minimo, $(-\sqrt{a}, a)$ e $(-\sqrt{a}, a)$ né di massimo né di minimo. Se $a \leq 0$ c'è un unico punto, $(0, \frac{a}{2})$, che non è né di massimo né di minimo.
   (c) Se $-1 < a < 1$ ci sono quattro punti critici: $(a, \sqrt{1-a^2})$ e $(a, -\sqrt{1-a^2})$ entrambi né di massimo né di minimo, $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ di massimo, $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ di minimo. Se $a \geq 1$, ci sono due punti: $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ di massimo e $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ né di massimo né di minimo. Se $a \leq -1$, ci sono ancora due punti, stavolta $\left(\frac{a-\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ non è né di massimo né di minimo mentre $\left(\frac{a+\sqrt{a^2+3}}{3}, 0\right)$ è di minimo.
   (d) Se $a > 0$, ci sono tre punti critici: $(0,0)$ di massimo e $(\pm 2\sqrt{a}, a)$ di sella. Se $a < 0$ o se $a = 0$ l'unico punto critico è $(0,0)$ e non è né di massimo né di minimo.
   (e) Se $a \neq 0$ ci sono quattro punti critici: $(0,0)$, $(3a,0)$, $(0,3a)$, (a,a). I primi tre sono di sella, il quarto è di minimo se $a > 0$, di massimo se $a < 0$. Se $a = 0$ l'unico punto critico è l'origine, che non è né massimo né minimo.

9. (a) Per $\lambda = 2$ il punto è di minimo, per gli altri λ non è critico (quindi né di massimo né di minimo).
(b) P_1 è di minimo, P_2 non è critico (quindi né di massimo né di minimo), P_3 è critico ma non è né di massimo né di minimo.
(c) L'origine è critico ma non è né di massimo né di minimo per f, non è critico per g (quindi né di massimo né di minimo), è di massimo per h.
(d) Il punto $(0, 1)$ è di massimo per f, non è critico per g (quindi né di massimo né di minimo), è di massimo per h.