UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 5.XI.2022

1. In ciascuno dei casi seguenti, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$, e calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore $\mathbf{v}$ della funzione nel punto (x_0, y_0).

   (a) $f(x,y) = xe^{y^2} + \dfrac{\cos y}{x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (1,0), \quad \mathbf{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x^2 - x - y) + \dfrac{x}{(y+1)^2}, \quad (x_0,y_0) = (1,1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^4}, \quad (x_0,y_0) = (2,1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

   (d) $f(x,y) = e^{x^2y+1}, \quad (x_0,y_0) = (1,-1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

   (e) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad (x_0,y_0) = (1,1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

   (f) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y^2}{2 - \operatorname{sen} x}\right), \quad (x_0,y_0) = (0,1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni di due variabili, trovare i punti critici e dire se sono punti di massimo relativo, o di minimo relativo, o nessuna delle due cose.

   (a) $f(x,y) = x^2e^y - y^2 + y$

   (b) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$

   (c) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^3$

   (d) $f(x,y) = \exp(1 - x^2 + y^2)$

   (e) $f(x,y) = xy(1 + x + y)$

   (f) $f(x,y) = \exp(4x - x^2 - 4y^2 - 3)$

   (g) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^4x^2$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y.$

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni di tre variabili, trovare i punti critici e studiarne la natura.

   (a) $f(x, y, z) = 2y(x + z + 1) - 3y^2 - x^2 - z^2$.

   (b) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$.

   (c) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2z$.

   (d) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz^2$.

   (e) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + z + \dfrac{xy}{z}$.

   (f) $f(x, y, z) = 6x^2 + \dfrac{4x}{y} - 2x + \dfrac{2}{y^2} - \dfrac{2}{y} + 2xz + z^2$.

4. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(2/3, -4/3)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

   (b) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(0, 1)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x, y) = \lambda y[\lambda^2y^2 - (x^2 - 1)^2]$.

   (c) Dire quali tra i punti $P_1 = (0, 1), P_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), P_3 = (-1, -1)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x, y) = x(x^2 + y^2 - 1)$.

   (d) Dire quali tra i punti $P_1 = (-1, 1), P_2 = (0, -1), P_3 = (0, \frac{1}{2})$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x, y) = (y - x^2)(y - 1)$.