UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 8.X.2021

1. In ciascuno dei casi seguenti, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$, e calcolare la derivata direzionale rispetto al vettore $\mathbf{v}$ della funzione nel punto (x_0, y_0).

   (a) $f(x,y) = xe^{y^2} + \dfrac{\cos y}{x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (1,0), \quad \mathbf{v} = (-1,1).$

   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x^2 - x - y) + \dfrac{x}{(y+1)^2}, \quad (x_0,y_0) = (1,1), \quad \mathbf{v} = (1,2).$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{4+x^2+y^4}, \quad (x_0,y_0) = (2,1), \quad \mathbf{v} = (1,-1).$

   (d) $f(x,y) = e^{x^2y+1}, \quad (x_0,y_0) = (1,-1), \quad \mathbf{v} = (1,1).$

   (e) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad (x_0,y_0) = (1,1), \quad \mathbf{v} = (1,-1).$

   (f) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y^2}{2-\operatorname{sen} x}\right), \quad (x_0,y_0) = (0,1), \quad \mathbf{v} = (2,-1).$

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni di due variabili, trovare i punti critici e dire se sono punti di massimo relativo, o di minimo relativo, o nessuna delle due cose.

   (a) $f(x,y) = x^2e^y - y^2 + y$

   (b) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$

   (c) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^3$

   (d) $f(x,y) = \exp(1 - x^2 + y^2)$

   (e) $f(x,y) = xy(1 + x + y)$

   (f) $f(x,y) = \exp(4x - x^2 - 4y^2 - 3)$

   (g) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^4x^2$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y.$

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni di tre variabili, trovare i punti critici e studiarne la natura.

   (a) $f(x,y,z) = 2y(x+z+1) - 3y^2 - x^2 - z^2$.

   (b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$.

   (c) $f(x,y,z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2z$.

   (d) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz^2$.

   (e) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + z + \dfrac{xy}{z}$.

4. Sia $f(x,y) = (y-2x^2)(y-x^2)$. Mostrare che, presa qualunque retta passante per $(0,0)$, la restrizione di f su quella retta ha un minimo locale in $(0,0)$ (cioè, per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $t \to f(at, bt)$ ha un minimo locale per $t = 0$). Mostrare che $(0,0)$ non è di minimo locale per f.

5. In ciascuno dei casi seguenti, dire se l'origine $(0,0)$ per la funzione $f(x,y)$ è un punto di massimo, o di minimo o nessuno dei due. Nel caso di massimo o minimo, determinare se è relativo o assoluto, stretto o non stretto.

   (a) $f(x,y) = x^2(\cos y - 1)$
   (b) $f(x,y) = (1+x^3)(1-y^2)$
   (c) $f(x,y) = \sin^2 x + \sin^3 y$
   (d) $f(x,y) = \sin(x^2y^2)$
   (e) $f(x,y) = (1+x^2y^4)^{-1}$
   (f) $f(x,y) = \ln(2+x^2+y^3)$
   (g) $f(x,y) = x^2y^3$
   (h) $f(x,y) = (x^2y^2-1)^2$
   (i) $f(x,y) = e^{x^2} + y^4 + 1$
   (l) $f(x,y) = \cos(xy) - \operatorname{sen}^2(x+y)$
   (m) $f(x,y) = (x+y)^5$
   (n) $f(x,y) = (x-y)^4 - 1$
   (o) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + x^3$
   (p) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy^3$
   (q) $f(x,y) = x^4(y^3-1) + 1$
   (r) $f(x,y) = y(y-x^2)$.

6. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se il punto (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo locale, o nessuno dei due.

   (a) $f(x,y) = (x+y-1)^2 + x^4, \quad (x_0,y_0) = (0,1)$.

   (b) $f(x,y) = (x+y-1)^2 - x^4, \quad (x_0,y_0) = (0,1)$.

   (c) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y^2, \quad (x_0,y_0) = (1,0)$.

   (d) $f(x,y) = xy^2(x+y-1), \quad (x_0,y_0) = (1,0)$.

   (e) $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(y+x^2+1), \quad (x_0,y_0) = (0,-1)$.

   (f) $f(x,y) = yx^2 - x^2(y+2)^2, \quad (x_0,y_0) = (0,-2)$.

   (g) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^4) + \cos(\pi + xy), \quad (x_0,y_0) = (1,0)$.

   (h) $f(x,y) = (x^2+y^2-4)(x-2), \quad (x_0,y_0) = (2,0)$.

7. Nei casi seguenti, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 - 1$.

   (b) $f(x,y) = x^2 - 1 + 2(4-x)y^4$.

   (c) $f(x,y) = x^4 - y^4 - x^3 + xy^2 + 1$.

   (d) $f(x,y) = xy(1 - x^3 - y^3)$.

   (e) $f(x,y) = x^4(1-2y) + 2y^2 - 1$.

8. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(2/3, -4/3)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

   (b) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(0,1)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x,y) = \lambda y[\lambda^2 y^2 - (x^2-1)^2]$.

   (c) Dire quali tra i punti $P_1 = (-\sqrt{2}, 2), P_2 = (2,0), P_3 = (0,4)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2y + 1$.

   (d) Dire quali tra i punti $P_1 = (1,1), P_2 = (0, \sqrt{5}), P_3 = (3,0)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + 9y^2 - 9)$.

   (e) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nell'origine

$$f(x,y) = e^{x^2 - 2y^2}, \qquad g(x,y) = x(x-1) - 4xy + 5y^2, \qquad h(x,y) = (x^3-1)y^2.$$

   (f) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,1)$

$$f(x,y) = \ln(2y - 2x^2 - y^2), \qquad g(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^3$$

$$h(x,y) = \cos(x^2) - \operatorname{sen}\left((y-1)^2\right) + 1.$$

Altri esercizi si possono trovare ad es. nei §1A, 1B, 1C (2° volume, parte seconda) del libro di Marcellini-Sbordone, e nel §2.3 del libro di Salsa-Squellati.