

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 7.X.2019

1. In ciascuno dei casi seguenti, scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto (x_0, y_0, z_0) , con $z_0 = f(x_0, y_0)$, e calcolare la derivata nella direzione \mathbf{v} della funzione nel punto (x_0, y_0) .

(a) $f(x, y) = \sin(2x^2 - x - y) + \frac{x}{(y+1)^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$.

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^4}$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.

(c) $f(x, y) = e^{x^2 y + 1}$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$.

(d) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni di due variabili, trovare i punti critici e dire se sono punti di massimo relativo, o di minimo relativo, o nessuna delle due cose.

(a) $f(x, y) = x^2 e^y - y^2 + y$

(b) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$

(c) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^3$

(d) $f(x, y) = \exp(1 - x^2 + y^2)$

(e) $f(x, y) = xy(1 + x + y)$

(f) $f(x, y) = \exp(4x - x^2 - 4y^2 - 3)$

(g) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2} - e^4 x^2$

(h) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni di tre variabili, trovare i punti critici e studiarne la natura.

(a) $f(x, y, z) = 2y(x + z + 1) - 3y^2 - x^2 - z^2$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$.

(c) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2 z$.

(d) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz^2$.

4. Sia $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$. Mostrare che, presa qualunque retta passante per $(0, 0)$, la restrizione di f su quella retta ha un minimo locale in $(0, 0)$ (cioè, per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $t \rightarrow f(at, bt)$ ha un minimo locale per $t = 0$). Mostrare che $(0, 0)$ non è di minimo locale per f .

5. In ciascuno dei casi seguenti, dire se l'origine $(0, 0)$ per la funzione $f(x, y)$ è un punto di massimo, o di minimo o nessuno dei due. Nel caso di massimo o minimo, determinare se è relativo o assoluto, stretto o non stretto.

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x, y) = x^2(\cos y - 1)$ | (b) $f(x, y) = (1 + x^3)(1 - y^2)$ |
| (c) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^3 y$ | (d) $f(x, y) = \sin(x^2 y^2)$ |
| (e) $f(x, y) = (1 + x^2 y^4)^{-1}$ | (f) $f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^3)$ |
| (g) $f(x, y) = x^2 y^3$ | (h) $f(x, y) = (x^2 y^2 - 1)^2$ |
| (i) $f(x, y) = e^{x^2} + y^4 + 1$ | (l) $f(x, y) = \cos(xy) - \operatorname{sen}^2(x + y)$ |
| (m) $f(x, y) = (x + y)^5$ | (n) $f(x, y) = (x - y)^4 - 1$ |
| (o) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + x^3$ | (p) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy^3$ |
| (q) $f(x, y) = x^4(y^3 - 1) + 1$ | (r) $f(x, y) = y(y - x^2)$. |

6. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se il punto (x_0, y_0) è un punto di massimo o di minimo locale, o nessuno dei due.

- (a) $f(x, y) = (x + y - 1)^2 + x^4$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.
 (b) $f(x, y) = (x + y - 1)^2 - x^4$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.
 (c) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
 (d) $f(x, y) = xy^2(x + y - 1)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
 (e) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(y + x^2 + 1)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$.
 (f) $f(x, y) = yx^2 - x^2(y + 2)^2$, $(x_0, y_0) = (0, -2)$.
 (g) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy^4) + \cos(\pi + xy)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
 (h) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 4)(y - 2)$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

7. Nei casi seguenti, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

- (a) $f(x, y) = x^2 - 1 + 2(4 - x)y^4$
 (b) $f(x, y) = x^4 - y^4 - x^3 + xy^2 + 1$
 (c) $f(x, y) = xy(1 - x^3 - y^3)$
 (d) $f(x, y) = x^4(1 - 2y) + 2y^2 - 1$.

8. Nei casi seguenti, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

(a) $f(x, y) = (x + y - 1)^2 + ax^4$.

(b) $f(x, y) = (y - x^2)(y - a)$.

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x - a)$.

(d) $f(x, y) = x^2(y - a) - 2y^2$.

(e) $f(x, y) = xy(x + y - 3a)$.

9. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(2/3, -4/3)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

(b) Dire quali tra i punti $P_1 = (-\sqrt{2}, 2)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (0, 4)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2y + 1$.

(c) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nell'origine

$$f(x, y) = e^{x^2-2y^2}, \quad g(x, y) = x(x-1) - 4xy + 5y^2, \quad h(x, y) = (x^3 - 1)y^2.$$

(d) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0, 1)$

$$f(x, y) = \ln(2y - 2x^2 - y^2), \quad g(x, y) = x^2 - 2y^2 + y^3$$

$$h(x, y) = \cos(x^2) - \sin((y-1)^2) + 1.$$

Altri esercizi si possono trovare ad es. nei §1A, 1B, 1C (2° volume, parte seconda) del libro di Marcellini-Sbordone, e nel §2.3 del libro di Salsa-Squellati.