UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 16.XII.2021

1. Per tutti gli insiemi proposti θ varia in $[0, 2\pi]$, mentre ρ, z variano come segue:
   (a) (i) $z \in [-R, R], \rho \in \left[0, \sqrt{R^2 - z^2}\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]$
   (b) (i) $z \in [0, R], \rho \in \left[0, \sqrt{R^2 - z^2}\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[0, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]$
   (c) (i) e (ii): $z \in [0, h], \rho \in [0, R]$
   (d) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, R - \frac{R}{h} z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[0, h - \frac{h}{R}\rho\right]$.
   (e) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, \frac{R}{h} z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[\frac{h}{R}\rho, h\right]$.

2. Integrando in coordinate cilindriche, in uno dei due modi descritti sopra, si trova:
   (i) Il volume vale rispettivamente (b) $\frac{2}{3}\pi R^3$, (c) $\pi R^2 h$, (d) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.
   (ii) Il baricentro ha coordinate rispettivamente (b) $(0, 0, \frac{3}{8}R)$, (c) $(0, 0, \frac{h}{2})$, (d) $(0, 0, \frac{1}{4}h)$.
   (iii) Il momento d'inerzia vale rispettivamente (b) $\frac{4}{15}\pi R^5$, (c) $\frac{\pi}{2} R^4 h$, (d) $\frac{\pi}{10} R^4 h$.

3. Calcolare le coordinate del baricentro degli insiemi seguenti (è sottinteso che i cilindri/coni in questione hanno come asse l'asse z e la base nel piano $z = 0$).
   (i) Ci limitiamo al calcolo di $\bar{x}$, perché per simmetria è evidente che $\bar{y} = 0$ e $\bar{z} = 2$. Il volume vale la metà di quello del cilindro, quindi 8π. Troviamo
   $$\bar{x} = \frac{1}{8\pi} \int_0^4 dz \int_0^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta \, d\theta = -\frac{8}{3\pi}.$$
   (ii) Per simmetria, $\bar{y} = -\bar{x}$ e $\bar{z} = 3$. E' sufficiente quindi calcolare $\bar{x}$. Troviamo
   $$\bar{x} = \frac{2}{3\pi} \int_0^6 dz \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \rho^2 \cos\theta \, d\theta = \frac{4}{3\pi}.$$
   (iii) Si ha $\bar{x} = 0$ per simmetria, mentre le altre coordinate valgono
   $$\bar{y} = \frac{3}{8\pi} \int_0^2 d\rho \int_0^{4-2\rho} dz \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{3}{8\pi} \int_0^2 2\rho^2 (4 - 2\rho) \, d\rho = \frac{2}{\pi}.$$
   $$\bar{z} = \frac{3}{8\pi} \int_0^2 d\rho \int_0^{4-2\rho} dz \int_0^{\pi} z\rho \, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^2 \rho (2 - \rho)^2 \, d\rho = 1.$$

(iv) Troviamo

$$\bar{x} = \frac{12}{\pi}\int_0^1 dz \int_0^{1-z} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta \, d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^1 (1-z)^3 \, dz = \frac{1}{\pi},$$

e $\bar{y} = \bar{x}$ per simmetria, e infine

$$\bar{z} = \frac{12}{\pi}\int_0^1 dz \int_0^{1-z} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\rho \, d\theta = 3\int_0^1 z(1-z)^2 \, dz = \frac{1}{4}.$$

Si può notare che, come per il cilindro, la coordinata z del baricentro del cono tagliato è la stessa del cono completo.

4. (a) In coordinate cilindriche

$$\int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^{\rho^2} \rho \, d\rho = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z}{2}\left(e^{1-z^2} - 1\right) d\theta = \frac{\pi}{8}(e-2),$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi} \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \; d\phi = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2}\left(e^{\rho^2} - 1\right) d\theta = \frac{\pi}{8}(e-2).$$

(b) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - 1](\operatorname{sen}\pi z)\,\rho \, d\theta \\ = \; & -\frac{\pi}{2}\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (\operatorname{sen}\pi z)\,\rho \, d\rho = -\frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-z^2)\operatorname{sen}\pi z \, dz = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi - 1] \operatorname{sen}(\pi\rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\theta \\ = \; & -\frac{\pi}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\pi\rho\cos\phi)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\int_0^1 [\cos(\pi\rho) - 1]\,\rho \, d\rho = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(c) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2+z^2)\rho \, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \ln(1+\rho^2+z^2)\rho \, d\rho \\ & (\text{posto } u = 1+\rho^2+z^2) \; = \frac{\pi}{4}\int_0^1 dz \int_{1+z^2}^2 \ln u \, du = \frac{\pi}{4}\int_0^1 dz \, [u\ln u - u]_{u=1+z^2}^{u=2} \, dz \\ = \; & \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left[(1+z^2)\ln(1+z^2) - 1 - z^2\right] dz \\ = \; & \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4}\left[\left(z + \frac{z^3}{3}\right)\ln(1+z^2)\right]_0^1 + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(z + \frac{z^3}{3}\right)\frac{2z}{1+z^2} \, dz + \frac{\pi}{3} \\ = \; & \frac{\pi}{6}\ln 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{z^2+1}\right) dz = \frac{\pi}{6}\ln 2 + \frac{2}{9}\pi - \frac{\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

oppure, in coordinate sferiche

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \\
= \; & \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho^2 \, d\rho = \frac{\pi}{2}\frac{\rho^3}{3}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{\rho^4}{1+\rho^2}\, d\rho \\
= \; & \frac{\pi}{6}\ln 2 - \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(\rho^2 - 1 + \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho = \frac{\pi}{6}\ln 2 + \frac{2}{9}\pi - \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

5. In tutti i casi ρ varia in $[0,1]$, mentre θ e ϕ hanno le seguenti limitazioni.

   (a) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi]$

   (b) $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [\pi/2, \pi]$

   (c) $\theta \in [-\pi/2, 0]$, $\phi \in [0,\pi]$

   (d) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$

   (e) $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$.

   NB sono corrette anche le risposte ottenute aggiungendo a entrambi gli estremi un multiplo intero di 2π; tutte le altre sono sbagliate (ad es., se la risposta giusta è $\theta \in [-\pi/2, 0]$, va ugualmente bene $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, mentre risposte quali $\theta \in [0, 3\pi/2]$, o $\theta \in [3\pi/2, 0]$ o ancora $\theta \in [-\pi/2, 2\pi]$ sono sbagliate); l'unica eccezione è naturalmente il caso di $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $[0,2\pi]$ può essere sostituito da un qualunque altro intervallo della stessa ampiezza.

6. Conviene usare le coordinate sferiche, rispetto alle quali il dominio corrisponde a $\rho \in [0,3], \theta \in [0,\pi/2], \phi \in [0,\pi/2]$. Pertanto la massa è data da

$$
\begin{aligned}
& \iiint_\Omega (1+x+y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} (1+\rho\sin\phi(\cos\theta+\sin\theta))(\rho^2\sin\phi)\, d\theta \\
= \; & \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\rho^2\sin\phi + 2\rho^3\sin^2\phi\right) d\phi \\
= \; & \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2}\rho^2 + \frac{\pi}{2}\rho^3\right) d\rho = \frac{117}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

7. Indichiamo con δ la densità (costante) del cilindro e con h la sua altezza (che non sono note, ma si vedrà che il loro valore non influirà sul risultato finale). Integrando sul cilindro si trova che la massa vale $25\pi\delta h$ e il momento d'inerzia $\frac{625}{2}\pi\delta h$. D'altra parte sappiamo che la massa vale 4, quindi $\pi\delta h = 4/25$, da cui si deduce che il momento d'inerzia vale 50.

8. I volumi si possono calcolare utilizzando le coordinate sferiche oppure quelle cilindriche, come descritto sotto. In alcuni casi è conveniente dividere il dominio in due parti uguali e limitarsi a studiarne una, moltiplicando il volume ottenuto per due.

   (i) $m(\Omega) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/4} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)$, oppure

$$
m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1).
$$

(ii) $m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{2}{3}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \int_{\sqrt{3}z}^{\sqrt{1-z^2}} \rho \, d\rho = \frac{2}{3}\pi.$$

(iii) $m(\Omega) = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\phi \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi$, oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi.$$

(iv) $m(\Omega) = 2\int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho$

$= \frac{16}{3}\pi(2-\sqrt{2}) + \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi(4-\sqrt{2}), \quad$ oppure

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{8}{3}\pi(4-\sqrt{2}).$$

(v) $m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\frac{1}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho$

$= 8\pi + \pi = 9\pi, \quad$ oppure

$$m(\Omega) = \int_{-1}^{2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho d\rho = \int_{-1}^{2} \pi(4-z^2) dz = 9\pi,$$

o ancora, usando coord. sferiche per una parte e cilindriche per l'altra:

$$m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho + \int_{-1}^{0} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\sqrt{3}z} \rho d\rho = 8\pi + \pi = 9\pi.$$

(vi) In coordinate sferiche centrate in $(0,0,1)$ troviamo

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{1}{\cos\phi}}^{\sqrt{2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

oppure, in coordinate cilindriche,

$$m(\Omega) = \int_{1-\sqrt{2}}^{0} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z-1)^2}} \rho d\rho = \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \pi[2-(z-1)^2] \, dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

o ancora, scrivendo Ω come differenza di un settore sferico e di un cono, e usando coordinate sferiche per il primo e cilindriche per il secondo:

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} \rho \, d\rho = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\pi - \frac{\pi}{3}.$$

9. Possiamo integrare per strati, osservando che lo strato di altezza z è dato da $\Omega_z = C(\sqrt{4-z^2})$ (cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{4-z^2}$) per $z \in [-1,0]$. Quindi la massa di Ω si può calcolare al modo seguente

$$\iiint_\Omega (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^{0} dz \int_{C(\sqrt{4-z^2})} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_{-1}^{0} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1+\rho^2+z^2)\rho \, d\rho = \int_{-1}^{0} dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(-z^4-2z^2+24) \, d\theta = \frac{347}{30}\pi.$$

10. Si tratta di un solido di rotazione intorno all'asse z, quindi le coordinate x e y del baricentro sono zero per simmetria e ci limitiamo a calcolare la z. Usando le coordinate cilindriche, troviamo che il volume vale

$$m(\Omega) = \int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} \rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi[2-(z+1)^2]\, dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

mentre l'integrale di z vale

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} z\rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi z[2-(z+1)^2]\, dz = \frac{\pi}{3}\left(\frac{23}{4}-4\sqrt{2}\right).$$

Quindi la coordinata z del baricentro vale

$$\bar{z} = \frac{\frac{23}{4}-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-5} = \frac{3}{4(4\sqrt{2}-5)} - 1.$$

11. In coordinate sferiche il dominio è descritto dalle limitazioni $\rho \in [0,2], \theta \in [0,2\pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto il momento d'inerzia è dato da

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2\phi)(\rho^2 \sin\phi)\, d\phi \\ &= \int_0^2 \rho^4\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi. \end{aligned}$$

oppure in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (16-8z^2)\, dz = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

12. Per simmetria, abbiamo $\bar{x} = \bar{y} = 0$, è sufficiente quindi calcolare $\bar{z}$. Usando le coordinate sferiche, troviamo che il volume dell'insieme vale

$$m(\Omega) = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{8}{3}\pi$$

e la coordinata del baricentro

$$\bar{z} = \frac{3}{8\pi}\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \rho^3 \operatorname{sen}\phi \cos\phi\, d\phi = \frac{3}{8\pi}3\pi = \frac{9}{8}.$$

13. Usando coordinate cilindriche, troviamo che il momento d'inerzia richiesto vale

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_0^1 d\rho \int_{-\sqrt{2-\rho^2}}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta \\ &= \int_0^1 4\pi\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\, d\rho = 2\pi\int_1^2 (2-u)\sqrt{u}\, du = \frac{4}{15}\pi(8\sqrt{2}-7), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $u = 2-\rho^2$.

14. Osserviamo che Ω_0 è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$ (ma non rispetto a $z = 0$). Pertanto funzioni dispari rispetto a x e/o rispetto a y hanno integrale nullo. Funzioni positive (risp. negative) su tutto Ω_0 hanno invece sicuramente integrale positivo (risp. negativo). Per brevità, nelle risposte chiamiamo "positive su Ω_0" anche funzioni che valgono zero su un sottoinsieme di misura nulla e sono strettamente positive sul resto di Ω_0 (es. la funzione x). Troviamo nei vari casi
(i) Ha integrale positivo, pari al volume di Ω_0.
(ii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(iii) Ha integrale positivo (perché z è positiva su Ω_0).
(iv) Ha integrale positivo (perché y^2 è positiva su Ω_0).
(v) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(vi) Ha integrale positivo, perché x^2z è positiva su Ω_0.
(vii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(viii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a y).
(ix) Ha integrale positivo, perché xy è compreso tra -1 e 1 su Ω_0, e il coseno di una quantità tra -1 e 1 è positivo.

15. Osserviamo che il dominio è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati, in particolare rispetto a $x = 0$ e a $z = 0$, quindi i termini x e z^3 hanno integrale nullo perché funzioni dispari. E' sufficiente quindi integrare il solo termine y^2. E' possibile integrare per strati:

$$\iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\left[(2-z^2)^2 - 1\right] dz = \frac{14}{15}\pi.$$

16. Il termine x ha integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate sferiche,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho$$
$$= \frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (\pi \operatorname{sen}^2\phi + 2\pi\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{104}{15}\pi.$$

17. I termini xe^y e z^3 hanno integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate cilindriche,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\left[(4-z^2)^2 - 9\right] dz = \frac{34}{15}\pi.$$

18. La piramide ha per base un quadrato di lato 2 e altezza pari a 1. Indicando con Ω la piramide e con Ω_z il suo strato di altezza z, abbiamo quindi che Ω_z è non vuoto per $z \in [0,1]$ ed è un quadrato di lato di lunghezza $2-2z$. Integrando per strati, troviamo:

$$m(\Omega) = \int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} dx\, dy = \int_0^1 \mathrm{area}(\Omega_z)\, dz = \int_0^1 (2-2z)^2\, dz = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{3}{4}\int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} z\, dx\, dy \\ &= \frac{3}{4}\int_0^1 \mathrm{area}(\Omega_z)\cdot z\, dz = \frac{3}{4}\int_0^1 (2-2z)^2 z\, dz = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

19. Introduciamo le nuove variabili x', y', z' definite da

$$x' = \frac{x}{a}, \qquad y' = \frac{y}{b}, \qquad z' = \frac{z}{c}.$$

Il cambio di variabili è dato da

$$\mathbf{F}(x', y', z') = (ax', by', cz')$$

la cui matrice jacobiana ha determinante costante $\det J_F \equiv abc$. Nelle variabili x', y', z', l'ellissoide diventa la sfera unitaria, che indichiamo con S. Otteniamo quindi

$$m(\Omega) = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \iiint_S abc\, dx'\, dy'\, dz' = (abc)\, m(S) = \frac{4}{3}\pi\, abc.$$

20. Essendo A contenuta nel semipiano verticale x, z con $x \geq 0$, la distanza del baricentro di A dall'asse z è data dalla coordinata $\bar{x}$ del baricentro, cioè:

$$d = \bar{x} = \frac{1}{\mathrm{area}(A)} \iint_A x\, dx\, dy.$$

Calcolando il volume di Ω in coordinate cilindriche, troviamo d'altra parte

$$\mathrm{volume}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_A \rho\, d\rho\, dz.$$

L'integrale doppio su A è lo stesso della formula precedente, con la prima variabile chiamata ρ invece di x. Combinando le due uguaglianze concludiamo:

$$\mathrm{volume}(\Omega) = \int_0^{2\pi} (d\, \mathrm{area}(A))\, d\theta = 2\pi d\, (\mathrm{area}(A)).$$