UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 19.XI.2021

1. Per tutti gli insiemi proposti θ varia in $[0, 2\pi]$, mentre ρ, z variano come segue:
   (a) (i) $z \in [-R, R], \rho \in \left[0, \sqrt{R^2 - z^2}\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]$
   (b) (i) $z \in [0, R], \rho \in \left[0, \sqrt{R^2 - z^2}\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[0, \sqrt{R^2 - \rho^2}\right]$
   (c) (i) e (ii): $z \in [0, h], \rho \in [0, R]$
   (d) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, R - \frac{R}{h}z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[0, h - \frac{h}{R}\rho\right]$.
   (e) (i) $z \in [0, h], \rho \in \left[0, \frac{R}{h}z\right]$ (ii) $\rho \in [0, R], z \in \left[\frac{h}{R}\rho, h\right]$.

2. Integrando in coordinate cilindriche, in uno dei due modi descritti sopra, si trova:
   (i) Il volume vale rispettivamente (b) $\frac{2}{3}\pi R^3$, (c) $\pi R^2 h$, (d) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.
   (ii) Il baricentro ha coordinate rispettivamente (b) $(0, 0, \frac{3}{8}R)$, (c) $(0, 0, \frac{h}{2})$, (d) $(0, 0, \frac{1}{4}h)$.
   (iii) Il momento d'inerzia vale rispettivamente (b) $\frac{4}{15}\pi R^5$, (c) $\frac{\pi}{2}R^4 h$, (d) $\frac{\pi}{10}R^4 h$.

3. (a) In coordinate cilindriche

$$\int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^{\rho^2} \rho \, d\rho = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z}{2} \left(e^{1-z^2} - 1\right) d\theta = \frac{\pi}{8}(e - 2),$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi} \rho^3 \cos\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} \left(e^{\rho^2} - 1\right) d\theta = \frac{\pi}{8}(e - 2).$$

(b) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - 1](\operatorname{sen}\pi z) \rho \, d\theta \\ = \; & -\frac{\pi}{2} \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (\operatorname{sen}\pi z) \rho \, d\rho = -\frac{\pi}{4} \int_0^1 (1 - z^2) \operatorname{sen}\pi z \, dz = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} &\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi - 1] \operatorname{sen}(\pi\rho\cos\phi) \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta \\ = \; & -\frac{\pi}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\pi\rho\cos\phi) \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(\pi\rho) - 1] \rho \, d\rho = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(c) In coordinate cilindriche

$$\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2+z^2)\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \ln(1+\rho^2+z^2)\rho\, d\rho$$

$$(\text{posto } u = 1+\rho^2+z^2) \ = \frac{\pi}{4}\int_0^1 dz \int_{1+z^2}^{2} \ln u\, du = \frac{\pi}{4}\int_0^1 dz\, [u\ln u - u]_{u=1+z^2}^{u=2}\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left[(1+z^2)\ln(1+z^2) - 1 - z^2\right] dz$$

$$= \frac{\pi}{2}(\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4}\left[\left(z + \frac{z^3}{3}\right)\ln(1+z^2)\right]_0^1 + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(z+\frac{z^3}{3}\right)\frac{2z}{1+z^2}\, dz + \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6}\ln 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\frac{1}{z^2+1}\right) dz = \frac{\pi}{6}\ln 2 + \frac{2}{9}\pi - \frac{\pi^2}{12},$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln(1+\rho^2)\rho^2\, d\rho = \frac{\pi}{2}\frac{\rho^3}{3}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1 - \frac{\pi}{3}\int_0^1 \frac{\rho^4}{1+\rho^2}\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6}\ln 2 - \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(\rho^2 - 1 + \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho = \frac{\pi}{6}\ln 2 + \frac{2}{9}\pi - \frac{\pi^2}{12}.$$

4. In tutti i casi ρ varia in $[0,1]$, mentre θ e ϕ hanno le seguenti limitazioni.

   (a) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi]$
   (b) $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [\pi/2, \pi]$
   (c) $\theta \in [-\pi/2, 0]$, $\phi \in [0,\pi]$
   (d) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$
   (e) $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$, $\phi \in [0,\pi/2]$.

   NB sono corrette anche le risposte ottenute aggiungendo a entrambi gli estremi un multiplo intero di 2π; tutte le altre sono sbagliate (ad es., se la risposta giusta è $\theta \in [-\pi/2, 0]$, va ugualmente bene $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, mentre risposte quali $\theta \in [0, 3\pi/2]$, o $\theta \in [3\pi/2, 0]$ o ancora $\theta \in [-\pi/2, 2\pi]$ sono sbagliate); l'unica eccezione è naturalmente il caso di $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $[0, 2\pi]$ può essere sostituito da un qualunque altro intervallo della stessa ampiezza.

5. Conviene usare le coordinate sferiche, rispetto alle quali il dominio corrisponde a $\rho \in [0,3], \theta \in [0,\pi/2], \phi \in [0,\pi/2]$. Pertanto la massa è data da

$$\iiint_\Omega (1+x+y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} (1+\rho\sin\phi(\cos\theta+\sin\theta))(\rho^2\sin\phi)\, d\theta$$

$$= \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\rho^2\sin\phi + 2\rho^3\sin^2\phi\right) d\phi$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2}\rho^2 + \frac{\pi}{2}\rho^3\right) d\rho = \frac{117}{8}\pi.$$

6. Indichiamo con δ la densità (costante) del cilindro e con h la sua altezza (che non sono note, ma si vedrà che il loro valore non influirà sul risultato finale). Integrando sul cilindro si trova che la massa vale $25\pi\delta h$ e il momento d'inerzia $\frac{625}{2}\pi\delta h$. D'altra parte sappiamo che la massa vale 4, quindi $\pi\delta h = 4/25$, da cui si deduce che il momento d'inerzia vale 50.

7. Possiamo integrare per strati, osservando che lo strato di altezza z è dato da $\Omega_z = C(\sqrt{4-z^2})$ (cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{4-z^2}$) per $z \in [-1, 0]$. Quindi la massa di Ω si può calcolare al modo seguente

$$\iiint_\Omega (1 + x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^0 dz \int_{C(\sqrt{4-z^2})} (1 + x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy$$
$$= \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1 + \rho^2 + z^2)\rho\, d\rho = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(-z^4 - 2z^2 + 24)\, d\theta = \frac{347}{30}\pi.$$

8. Si tratta di un solido di rotazione intorno all'asse z, quindi le coordinate x e y del baricentro sono zero per simmetria e ci limitiamo a calcolare la z. Usando le coordinate cilindriche, troviamo che il volume vale

$$m(\Omega) = \int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} \rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi[2 - (z+1)^2]\, dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 5),$$

mentre l'integrale di z vale

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} z\rho d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi z[2 - (z+1)^2]\, dz = \frac{\pi}{3}\left(\frac{23}{4} - 4\sqrt{2}\right).$$

Quindi la coordinata z del baricentro vale

$$\bar{z} = \frac{\frac{23}{4} - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} = \frac{3}{4(4\sqrt{2} - 5)} - 1.$$

9. In coordinate sferiche il dominio è descritto dalle limitazioni $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto il momento d'inerzia è dato da

$$\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2\phi)(\rho^2 \sin\phi)\, d\phi$$
$$= \int_0^2 \rho^4\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

oppure in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} (16 - 8z^2)\, dz = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

10. Osserviamo che Ω_0 è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$ (ma non rispetto a $z = 0$). Pertanto funzioni dispari rispetto a x e/o rispetto a y hanno integrale nullo. Funzioni positive (risp. negative) su tutto Ω_0 hanno invece sicuramente integrale positivo (risp. negativo). Per brevità, nelle risposte chiamiamo "positive su Ω_0" anche funzioni che valgono zero su un sottoinsieme di misura nulla e sono strettamente positive sul resto di Ω_0 (es. la funzione x). Troviamo nei vari casi
(i) Ha integrale positivo, pari al volume di Ω_0.

(ii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(iii) Ha integrale positivo (perché z è positiva su Ω_0).
(iv) Ha integrale positivo (perché y^2 è positiva su Ω_0).
(v) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(vi) Ha integrale positivo, perché $x^2 z$ è positiva su Ω_0.
(vii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
(viii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a y).
(ix) Ha integrale positivo, perché xy è compreso tra -1 e 1 su Ω_0, e il coseno di una quantità tra -1 e 1 è positivo.

11. Osserviamo che il dominio è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati, in particolare rispetto a $x = 0$ e a $z = 0$, quindi i termini x e z^3 hanno integrale nullo perché funzioni dispari. E' sufficiente quindi integrare il solo termine y^2. E' possibile integrare per strati:

$$\iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\left[(2-z^2)^2 - 1\right] dz = \frac{14}{15}\pi.$$

12. Il termine x ha integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate sferiche,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho$$
$$= \frac{32}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (\pi \operatorname{sen}^2\phi + 2\pi\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{104}{15}\pi.$$

13. I termini xe^y e z^3 hanno integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate cilindriche,

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega y^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{4}\left[(4-z^2)^2 - 9\right] dz = \frac{34}{15}\pi.$$

14. La piramide ha per base un quadrato di lato 2 e altezza pari a 1. Indicando con Ω la piramide e con Ω_z il suo strato di altezza z, abbiamo quindi che Ω_z è non vuoto per $z \in [0,1]$ ed è un quadrato di lato di lunghezza $2-2z$. Integrando per strati, troviamo:

$$m(\Omega) = \int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} dx\,dy = \int_0^1 \operatorname{area}(\Omega_z)\,dz = \int_0^1 (2-2z)^2\,dz = \frac{4}{3}.$$

$$\bar{z} = \frac{3}{4}\int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} z\,dx\,dy$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 \operatorname{area}(\Omega_z)\cdot z\,dz = \frac{3}{4}\int_0^1 (2-2z)^2 z\,dz = \frac{1}{4}.$$

15. Introduciamo le nuove variabili x', y', z' definite da

$$x' = \frac{x}{a}, \qquad y' = \frac{y}{b}, \qquad z' = \frac{z}{c}.$$

Il cambio di variabili è dato da

$$\mathbf{F}(x', y', z') = (ax', by', cz')$$

la cui matrice jacobiana ha determinante costante $\det J_F \equiv abc$. Nelle variabili x', y', z', l'ellissoide diventa la sfera unitaria, che indichiamo con S. Otteniamo quindi

$$m(\Omega) = \iiint_\Omega dx\, dy\, dz = \iiint_S abc\, dx'\, dy'\, dz' = (abc)\, m(S) = \frac{4}{3}\pi\, abc.$$