

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 9.XI.2019

1. Per tutti gli insiemi proposti θ varia in $[0, 2\pi]$, mentre ρ, z variano come segue:

$$(a) \quad (i) \quad z \in [-R, R], \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}] \quad (ii) \quad \rho \in [0, R], z \in [-\sqrt{R^2 - \rho^2}, \sqrt{R^2 - \rho^2}]$$

$$(b) \quad (i) \quad z \in [0, R], \rho \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}] \quad (ii) \quad \rho \in [0, R], z \in [0, \sqrt{R^2 - \rho^2}]$$

$$(c) \quad (i) \text{ e } (ii): \quad z \in [0, h], \rho \in [0, R]$$

$$(d) \quad (i) \quad z \in [0, h], \rho \in [0, R - \frac{R}{h}z] \quad (ii) \quad \rho \in [0, R], z \in [0, h - \frac{h}{R}\rho] .$$

$$(e) \quad (i) \quad z \in [0, h], \rho \in [0, \frac{R}{h}z] \quad (ii) \quad \rho \in [0, R], z \in [\frac{h}{R}\rho, h] .$$

2. Integrando in coordinate cilindriche, in uno dei due modi descritti sopra, si trova:

$$(i) \quad \text{Il volume vale rispettivamente (b) } \frac{2}{3}\pi R^3, \quad (c) \pi R^2 h, \quad (d) \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

$$(ii) \quad \text{Il baricentro ha coordinate rispettivamente (b) } (0, 0, \frac{3}{8}R), \quad (c) (0, 0, \frac{h}{2}), \quad (d) (0, 0, \frac{1}{4}h).$$

$$(iii) \quad \text{Il momento d'inerzia vale rispettivamente (b) } \frac{4}{15}\pi R^5, \quad (c) \frac{\pi}{2}R^4 h, \quad (d) \frac{\pi}{10}R^4 h.$$

3. (a) In coordinate cilindriche

$$\int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z e^{\rho^2} \rho d\rho = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z}{2} (e^{1-z^2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{8}(e - 2),$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2 \sin^2 \phi} \rho^3 \cos \phi \sin \phi d\phi = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{2} (e^{\rho^2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{8}(e - 2).$$

(b) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos \theta - \sin \theta) - 1](\sin \pi z) \rho d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (\sin \pi z) \rho d\rho = -\frac{\pi}{4} \int_0^1 (1 - z^2) \sin \pi z dz = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} & \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\rho(\cos \theta - \sin \theta) \sin \phi - 1] \sin(\pi \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(\pi \rho) - 1] \rho d\rho = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(c) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2+z^2) \rho d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \ln(1+\rho^2+z^2) \rho d\rho \\
 & \text{(posto } u = 1 + \rho^2 + z^2) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 dz \int_{1+z^2}^2 \ln u du = \frac{\pi}{4} \int_0^1 dz [u \ln u - u]_{u=1+z^2}^{u=2} dz \\
 & = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4} \int_0^1 [(1+z^2) \ln(1+z^2) - 1 - z^2] dz \\
 & = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - 1) - \frac{\pi}{4} \left[\left(z + \frac{z^3}{3} \right) \ln(1+z^2) \right]_0^1 + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(z + \frac{z^3}{3} \right) \frac{2z}{1+z^2} dz + \frac{\pi}{3} \\
 & = \frac{\pi}{6} \ln 2 - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\frac{2}{3} z^2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \frac{1}{z^2+1} \right) dz = \frac{\pi}{6} \ln 2 + \frac{2}{9} \pi - \frac{\pi^2}{12},
 \end{aligned}$$

oppure, in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2) \rho^2 \sin \phi d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\rho^2) \rho^2 \sin \phi d\phi \\
 & = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} \frac{\rho^3}{3} \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{\rho^4}{1+\rho^2} d\rho \\
 & = \frac{\pi}{6} \ln 2 - \frac{\pi}{3} \int_0^1 \left(\rho^2 - 1 + \frac{1}{1+\rho^2} \right) d\rho = \frac{\pi}{6} \ln 2 + \frac{2}{9} \pi - \frac{\pi^2}{12}.
 \end{aligned}$$

4. In tutti i casi ρ varia in $[0, 1]$, mentre θ e ϕ hanno le seguenti limitazioni.

- (a) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0, \pi]$
- (b) $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [\pi/2, \pi]$
- (c) $\theta \in [-\pi/2, 0]$, $\phi \in [0, \pi]$
- (d) $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $\phi \in [0, \pi/2]$
- (e) $\theta \in [\pi, 3\pi/2]$, $\phi \in [0, \pi/2]$.

NB sono corrette anche le risposte ottenute aggiungendo a entrambi gli estremi un multiplo intero di 2π ; tutte le altre sono sbagliate (ad es., se la risposta giusta è $\theta \in [-\pi/2, 0]$, va ugualmente bene $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$, mentre risposte quali $\theta \in [0, 3\pi/2]$, o $\theta \in [3\pi/2, 0]$ o ancora $\theta \in [-\pi/2, 2\pi]$ sono sbagliate); l'unica eccezione è naturalmente il caso di $\theta \in [0, 2\pi]$ dove $[0, 2\pi]$ può essere sostituito da un qualunque altro intervallo della stessa ampiezza.

5. Conviene usare le coordinate sferiche, rispetto alle quali il dominio corrisponde a $\rho \in [0, 3]$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $\phi \in [0, \pi/2]$. Pertanto la massa è data da

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\Omega} (1+x+y) dx dy dz = \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} (1+\rho \sin \phi (\cos \theta + \sin \theta)) (\rho^2 \sin \phi) d\theta \\
 & = \int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} \rho^2 \sin \phi + 2\rho^3 \sin^2 \phi \right) d\phi \\
 & = \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2} \rho^2 + \frac{\pi}{2} \rho^3 \right) d\rho = \frac{117}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

6. Indichiamo con δ la densità (costante) del cilindro e con h la sua altezza (che non sono note, ma si vedrà che il loro valore non influirà sul risultato finale). Si trova che la massa del cilindro vale $25\pi\delta h$ e il momento d'inerzia $\frac{625}{2}\pi\delta h$. D'altra parte sappiamo che la massa vale 4, quindi $\pi\delta h = 4/25$, da cui si deduce che il momento d'inerzia vale 50.

7. In tutti gli esempi proposti, è sottinteso che l'angolo θ varia in tutto $[0, 2\pi]$. In alcuni casi, occorre dividere il dominio in due parti in cui gli estremi hanno espressioni diverse.

- (i) (a) $0 \leq z \leq \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}, \quad 0 \leq \rho \leq az, \quad \text{unito a} \quad \frac{R}{\sqrt{1+a^2}} \leq z \leq R, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}.$
 (b) $0 \leq \rho \leq \frac{aR}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{\rho}{a} \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $0 \leq \phi \leq \arctg a, \quad 0 \leq \rho \leq R.$
- (ii) (a) $0 \leq z \leq \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}, \quad az \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2},$
 (b) $0 \leq \rho \leq \frac{aR}{\sqrt{1+a^2}}, \quad 0 \leq z \leq \frac{\rho}{a}, \quad \text{unito a} \quad \frac{Ra}{\sqrt{1+a^2}} \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $\arctg a \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq R.$
- (iii) (a) $-\sqrt{R^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}, \quad r \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}.$
 (b) $r \leq \rho \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $\arcsen \frac{r}{R} \leq \phi \leq \pi - \arcsen \frac{r}{R}, \quad \frac{r}{\sin \phi} \leq \rho \leq R.$
- (iv) (a) $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}, \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad \text{unito a} \quad \sqrt{R^2 - r^2} \leq z \leq R, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}.$
 (b) $0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $0 \leq \phi \leq \arcsen \frac{r}{R}, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad \text{unito a} \quad \arcsen \frac{r}{R} \leq \phi \leq \pi/2, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{r}{\sin \phi}.$
- (v) (a) $r \leq z \leq R, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}.$
 (b) $0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - r^2}, \quad r \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $0 \leq \phi \leq \arccos \frac{r}{R}, \quad \frac{r}{\cos \phi} \leq \rho \leq R.$
- (vi) (a) $0 \leq z \leq \frac{R}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2Rz - z^2}, \quad \text{unito a} \quad \frac{R}{2} \leq z \leq R, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}.$
 (b) $0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2}R, \quad R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad \text{unito a} \quad \frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \cos \phi.$
- (vii) (a) $0 \leq z \leq \frac{2R}{a^2+1}, \quad 0 \leq \rho \leq az, \quad \text{unito a} \quad \frac{2R}{a^2+1} \leq z \leq 2R, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2Rz - z^2}.$
 (b) $0 \leq \rho \leq \frac{2aR}{a^2+1}, \quad \frac{\rho}{a} \leq z \leq R + \sqrt{R^2 - \rho^2}.$
 (c) $0 \leq \phi \leq \arctg a, \quad 0 \leq \rho \leq 2R \cos \phi.$

8. I volumi si possono calcolare utilizzando le coordinate sferiche oppure quelle cilindriche, come descritto sotto. In alcuni casi è conveniente dividere il dominio in due parti uguali e limitarsi a studiarne una, moltiplicando il volume ottenuto per due.

$$(i) \quad m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin \phi d\phi = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1), \text{ oppure}$$

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2} - 1).$$

$$(ii) \quad m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \rho^2 \sin \phi \, d\phi = \frac{2}{3}\pi, \text{ oppure}$$

$$m(\Omega) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dz \int_{\sqrt{3}z}^{\sqrt{1-z^2}} \rho \, d\rho = \frac{2}{3}\pi.$$

$$(iii) \quad m(\Omega) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\phi \int_{\frac{1}{\sin \phi}}^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi, \text{ oppure}$$

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho = 4\sqrt{3}\pi.$$

$$(iv) \quad m(\Omega) = 2 \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sin \phi}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho$$

$$= \frac{16}{3}\pi(2 - \sqrt{2}) + \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi(4 - \sqrt{2}), \quad \text{oppure}$$

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{8}{3}\pi(4 - \sqrt{2}).$$

$$(v) \quad m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\frac{1}{\cos \phi}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho$$

$$= 8\pi + \pi = 9\pi, \quad \text{oppure}$$

$$m(\Omega) = \int_{-1}^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho = \int_{-1}^2 \pi(4 - z^2) dz = 9\pi,$$

o ancora, usando coord. sferiche per una parte e cilindriche per l'altra:

$$m(\Omega) = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho + \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{-\sqrt{3}z} \rho \, d\rho = 8\pi + \pi = 9\pi.$$

(vi) In coordinate sferiche centrate in $(0, 0, 1)$ troviamo

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{1}{\cos \phi}}^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 5),$$

oppure, in coordinate cilindriche,

$$m(\Omega) = \int_{1-\sqrt{2}}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z-1)^2}} \rho \, d\rho = \int_{1-\sqrt{2}}^0 \pi[2 - (z-1)^2] dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 5),$$

o ancora, scrivendo Ω come differenza di un settore sferico e di un cono, e usando coordinate sferiche per il primo e cilindriche per il secondo:

$$m(\Omega) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} \rho \, d\rho = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi - \frac{\pi}{3}.$$

$$(vii) \quad m(\Omega) = \int_0^{\pi/3} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho + \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5}{12}\pi, \quad \text{oppure}$$

$$m(\Omega) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \rho \, d\rho = \frac{5}{12}\pi.$$

$$(viii) \quad m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} d\phi \int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho = \frac{14}{3}\pi, \text{ oppure}$$

$$m(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} d\rho \int_{\sqrt{3}\rho}^{2+\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz = \frac{14}{3}\pi.$$

9. Possiamo integrare per strati, osservando che lo strato di altezza z è dato da $\Omega_z = C(\sqrt{4-z^2})$ (cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{4-z^2}$) per $z \in [-1, 0]$. Quindi la massa di Ω si può calcolare al modo seguente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^0 dz \int_{C(\sqrt{4-z^2})} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1+\rho^2+z^2) \rho \, d\rho = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(-z^4-2z^2+24) \, d\theta = \frac{347}{30}\pi. \end{aligned}$$

Oppure si può scrivere Ω come unione di un settore sferico Ω_1 e in un cono Ω_2 , usando coordinate sferiche su Ω_1

$$\iiint_{\Omega_1} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (1+\rho^2)\rho^2 \sin\phi \, d\theta = \frac{136}{15}\pi,$$

e cilindriche su Ω_2

$$\iiint_{\Omega_2} (1+x^2+y^2+z^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3z}} (1+\rho^2+z^2)\rho \, d\rho = \frac{5}{2}\pi.$$

Sommndo i contributi, si ottiene il risultato di $\frac{347}{30}\pi$ già ottenuto con l'altro metodo.

10. Si tratta di un solido di rotazione intorno all'asse z , quindi le coordinate x e y del baricentro sono zero per simmetria. Possiamo procedere in vari modi (come nel caso dell'esercizio 8-(vi), in cui si considera un solido molto simile). Usando ad esempio le coordinate cilindriche, troviamo che il volume vale

$$m(\Omega) = \int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} \rho \, d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi[2-(z+1)^2] \, dz = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5),$$

mentre l'integrale di z vale

$$\int_0^{\sqrt{2}-1} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2-(z+1)^2}} z \rho \, d\rho = \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi z[2-(z+1)^2] \, dz = \frac{\pi}{3} \left(\frac{23}{4} - 4\sqrt{2} \right).$$

Quindi la coordinata z del baricentro vale

$$\bar{z} = \frac{\frac{23}{4} - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2} - 5} = \frac{3}{4(4\sqrt{2} - 5)} - 1.$$

11. In coordinate sferiche il dominio è descritto dalle limitazioni $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Pertanto il momento d'inerzia è dato da

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\rho^2 \sin^2 \phi)(\rho^2 \sin \phi) d\phi \\ &= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{2}}{12} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \pi. \end{aligned}$$

oppure in coordinate cilindriche

$$\int_0^{\sqrt{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (16 - 8z^2) dz = \frac{16\sqrt{2}}{3} \pi.$$

12. (i) In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} |z^2 - 1| dx dy dz &= \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} (1 - z^2) \rho d\theta \\ &\quad + \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} (z^2 - 1) \rho d\theta \\ &= \int_0^1 \pi(1 - z^2)(4 - z^2) dz + \int_1^2 \pi(z^2 - 1)(4 - z^2) dz = 4\pi. \end{aligned}$$

- (ii) In coordinate sferiche

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 - z^2| dx dy dz &= \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{2\pi} (\rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta \\ &\quad + \int_0^2 d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \phi - \rho^2 \cos^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi/4} \rho^4 (2 \cos^2 \phi - 1) \sin \phi d\phi \\ &\quad + 2\pi \int_0^2 d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^4 (1 - 2 \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi \\ &= \frac{64}{15} \pi (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

- (iii) Indichiamo con Ω_- e Ω_+ le parti di Ω con $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ e $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ rispettivamente. Poiché il calcolo dell'integrale su Ω_- risulta lungo, è più conveniente esprimere tutto in termini di un integrale (senza modulo) su tutto Ω e di uno su Ω_+ , al modo seguente:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 - 1| dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega_-} (1 - x^2 - y^2) dx dy dz + \iiint_{\Omega_+} (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega_+} (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz. \end{aligned}$$

L'integrale su tutto Ω si calcola facilmente in coordinate sferiche

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1 - x^2 + y^2) dx dy dz &= m(\Omega) - \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \frac{16}{3}\pi - \int_0^2 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin^3 \phi d\theta = -\frac{16}{5}\pi, \end{aligned}$$

mentre quello su Ω_+ si può calcolare in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} 2 \iiint_{\Omega_+} (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} (\rho^2 - 1) \rho d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (\rho^2 - 1) \rho d\rho \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} [(4 - z^2)^2 - 2(4 - z^2)] dz = \frac{19}{5}\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Concludiamo

$$\iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 - 1| dx dy dz = \frac{19\sqrt{3} - 16}{5}\pi.$$

13. Osserviamo che Ω_0 è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$ (ma non rispetto a $z = 0$). Pertanto funzioni dispari rispetto a x e/o rispetto a y hanno integrale nullo. Funzioni positive (risp. negative) su tutto Ω_0 hanno invece sicuramente integrale positivo (risp. negativo). Per brevità, nelle risposte chiamiamo “positive su Ω_0 ” anche funzioni che valgono zero su un sottoinsieme di misura nulla e sono strettamente positive sul resto di Ω_0 (es. la funzione x). Troviamo nei vari casi
- (i) Ha integrale positivo, pari al volume di Ω_0 .
 - (ii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (iii) Ha integrale positivo (perché z è positiva su Ω_0).
 - (iv) Ha integrale positivo (perché y^2 è positiva su Ω_0).
 - (v) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (vi) Ha integrale positivo, perché $x^2 z$ è positiva su Ω_0 .
 - (vii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a x).
 - (viii) Ha integrale nullo (è dispari rispetto a y).
 - (ix) Ha integrale positivo, perché xy è compreso tra -1 e 1 su Ω_0 , e il coseno di una quantità tra -1 e 1 è positivo.
 - (x) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y ; tuttavia soddisfa $f(-x, -y) = -f(x, y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè vale $(x, y, z) \in \Omega$ se e solo se $(-x, -y, z) \in \Omega$, si ha che l'integrale è nullo.
 - (xi) Il termine x^3 è dispari e quindi dà contributo nullo all'integrale. Il termine $z^3 - z$ è invece negativo per $z \in [0, 1]$, come avviene nei punti di Ω_0 . L'integrale di f quindi è negativo.
 - (xii) La funzione non è dispari né rispetto a x né rispetto a y ; tuttavia soddisfa $f(y, x) = -f(x, y)$, cioè cambia segno rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Poiché Ω_0 è invariante rispetto a questa trasformazione, cioè $(x, y, z) \in \Omega$ se e solo se $(y, x, z) \in \Omega$, l'integrale è nullo.
14. La funzione è simmetrica rispetto al cambio di segno di ciascuna delle tre coordinate. Quindi, se indichiamo con Ω la sfera e con Ω_+ l'ottavo di sfera dove le tre coordinate sono positive, abbiamo che l'integrale di f su Ω vale otto volte l'integrale quello su Ω_+ . Poiché su Ω_+ si possono togliere

i moduli nella definizione di f , troviamo

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f \, dx \, dy \, dz &= 8 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 8 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \sin \phi + \cos \phi) d\theta \\ &= 8 \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho^3 \sin \phi \left(2 \sin \phi + \frac{\pi}{2} \cos \phi \right) d\phi = 8 \int_0^1 \frac{3}{4} \pi \rho^3 d\rho = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

15. Osserviamo che il dominio è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati, in particolare rispetto a $x = 0$ e a $z = 0$, quindi i termini x e z^3 hanno integrale nullo perché funzioni dispari. E' sufficiente quindi integrare il solo termine y^2 . E' possibile integrare per strati:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{2-z^2}} \rho^3 \sin^2 \theta \, d\rho \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} [(2-z^2)^2 - 1] \, dz = \frac{14}{15} \pi. \end{aligned}$$

In alternativa, è possibile scrivere il dominio come $\Omega = \Omega_1 \setminus \Omega_2$ dove Ω_1 si scrive in coordinate sferiche come

$$\Omega_1 = \left\{ (\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$$

mentre Ω_2 si scrive in coordinate cilindriche come

$$\Omega_2 = \{ (\rho, \theta, z) : -1 \leq z \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq \rho \leq 1 \}.$$

Gli integrali valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_1} y^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \\ &= \frac{4}{5} \sqrt{2} \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^3 \phi \, d\phi = \frac{4}{3} \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_2} y^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{|z|}^1 \rho^3 \sin^2 \theta \, d\rho \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} (1 - z^4) \, dz = \frac{2}{5} \pi. \end{aligned}$$

Sottraendo i due risultati si trova il valore dell'integrale su Ω .

16. Il termine x ha integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate sferiche,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \\ &= \frac{32}{5} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (\pi \sin^2 \phi + 2\pi \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi = \frac{104}{15} \pi. \end{aligned}$$

17. I termini xe^y e z^3 hanno integrale nullo per simmetria. Troviamo quindi, utilizzando le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\pi}{4} [(4-z^2)^2 - 9] dz = \frac{34}{15} \pi. \end{aligned}$$

18. La piramide ha per base un quadrato di lato 2 e altezza pari a 1. Indicando con Ω la piramide e con Ω_z il suo strato di altezza z , abbiamo quindi che Ω_z è non vuoto per $z \in [0, 1]$ ed è un quadrato di lato di lunghezza $2 - 2z$. Integrando per strati, troviamo:

$$m(\Omega) = \int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} dx dy = \int_0^1 \text{area}(\Omega_z) dz = \int_0^1 (2 - 2z)^2 dz = \frac{4}{3}.$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{3}{4} \int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} z dx dy \\ &= \frac{3}{4} \int_0^1 \text{area}(\Omega_z) \cdot z dz = \frac{3}{4} \int_0^1 (2 - 2z)^2 z dz = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

19. Il tetraedro Ω può essere descritto come insieme normale rispetto all'asse z , al modo seguente

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1 - x - y\},$$

dove abbiamo indicato con T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ nel piano. T a sua volta si può scrivere come

$$T = \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

- (a) Calcoliamo dapprima il volume:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(oppure si può usare la nota proprietà che il volume di un tetraedro è dato dall'area della base per l'altezza diviso tre). Pertanto

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6 \iiint_{\Omega} x dx dy dz = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x dz \\ &= 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x(1 - x - y) dy = 3 \int_0^1 x(1 - x)^2 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Con un calcolo analogo si trova che anche le coordinate $\bar{y}$ e $\bar{z}$ valgono $1/4$ (come si può dedurre anche dalla simmetria del dominio).

- (b) Troviamo

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y + z)\right) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x + y)\right) dy = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} x\right) dx = \frac{4}{\pi^2} (\pi - 2). \end{aligned}$$

20. Introduciamo le nuove variabili x', y', z' definite da

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{a}.$$

Il cambio di variabili è dato da

$$\mathbf{F}(x', y', z') = (ax', by', cz')$$

la cui matrice jacobiana ha determinante costante $\det J_F \equiv abc$. Nelle variabili x', y', z' , l'ellissoide diventa la sfera unitaria, che indichiamo con Ω' . Otteniamo quindi

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega'} abc \, dx' \, dy' \, dz' = (abc) m(\Omega') = \frac{4}{3}\pi abc.$$