UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 16.XII.2022

1. Descrivere i seguenti insiemi in coordinate cilindriche, nei due modi seguenti:
(i) z che varia tra estremi fissi, ρ che varia tra estremi dipendenti da z (integrazione per strati);
(ii) ρ che varia tra estremi fissi, z che varia tra estremi dipendenti da ρ (integrazione per fili).

   (a) Ω è la sfera (piena) di centro $(0, 0, 0)$ e raggio R.

   (b) Ω è la metà superiore della sfera del punto precedente.

   (c) Ω è il cilindro che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e altezza h (NB si sottintende un cilindro "retto", cioè con asse perpendicolare alla base).

   (d) Ω è il cono che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0, 0, h)$, con $h > 0$.

   (e) Ω è il cono "rovesciato" che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = h$, con $h > 0$, e per vertice l'origine.

2. Per gli insiemi (b),(c) e (d) dell'esercizio precedente, si risponda ai seguenti quesiti

   (i) Calcolare il volume dell'insieme.

   (ii) Trovare il baricentro dell'insieme (considerando la densità unitaria).

   (iii) Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z dell'insieme.

   NB Ricordiamo che il momento di inerzia rispetto all'asse z di un insieme Ω di densità assegnata $\delta(x, y, z)$ è l'integrale

$$\int\int\int_\Omega (x^2 + y^2)\, \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

   Se la densità non è specificata, si sottintende $\delta \equiv 1$.

3. Calcolare le coordinate del baricentro degli insiemi seguenti (è sottinteso che i cilindri/coni in questione hanno come asse l'asse z e la base nel piano $z = 0$, e che la densità è unitaria).

   (i) Mezzo cilindro di raggio 2 e altezza 4 contenuto nel semispazio $x \leq 0$.

   (ii) Quarto di cilindro di raggio 1 e altezza 5 con $x \geq 0, y \leq 0$.

   (iii) Mezzo cono di raggio 2 e altezza 4 contenuto nel semispazio $y \geq 0$.

(iv) Quarto di cono di raggio 1 e altezza 1 contenuto nel semispazio $x \geq 0, y \geq 0$.

4. Sia $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcolare l'integrale su Ω delle funzioni

   (a) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$.

   (b) $f(x, y, z) = (x - y - 1) \operatorname{sen} \pi z$.

   (c) $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.

5. Sia B la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1. Per ciascuno dei casi seguenti, descrivere in coordinate sferiche l'insieme B^* definito da

   (a) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $x \leq 0$.

   (b) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $z \leq 0$.

   (c) B^* è il quarto della sfera B con $x \geq 0$, $y \leq 0$.

   (d) B^* è il quarto della sfera B con $x \leq 0$, $z \geq 0$.

   (e) B^* è l'ottavo della sfera B con $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$.

6. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è l'ottavo di sfera $\{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x + y$.

7. Sia Ω un cilindro omogeneo (cioè con densità costante) di base circolare di raggio 5. La massa di Ω è nota e vale 4. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto al suo asse.

8. Calcolare il volume degli insiemi seguenti

   (i) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ z \geq 0\}$

   (ii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ x^2 + y^2 \geq 3z^2\}$.

   (iii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

   (iv) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   (v) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq -1\}$.

   (vi) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 2, \ z \leq 0\}$.

9. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è la parte della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ compresa tra i piani di equazione $z = -1$ e $z = 0$ e avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

10. Calcolare le coordinate del baricentro dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 2, \ z \geq 0\}.$$

11. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di Ω, dove
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq z^2,\ z \geq 0\}.$$

12. Calcolare le coordinate del baricentro dell'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \leq 3z^2,\ \ z \geq 0\,\}.$$

13. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z dell'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1\,\}.$$

14. Sia Ω la sfera di centro l'origine e raggio 1 e sia Ω_0 la metà di Ω che giace nel semispazio $z \geq 0$. Senza fare calcoli, dire quali tra le funzioni seguenti hanno integrale nullo su Ω_0 per simmetria. Negli altri casi determinare, se possibile, il segno dell'integrale:

    (i) $f(x,y,z) = 1$, (ii) $f(x,y,z) = x$, (iii) $f(x,y,z) = z$,
    (iv) $f(x,y,z) = y^2$, (v) $f(x,y,z) = xz$, (vi) $f(x,y,z) = x^2z$,
    (vii) $f(x,y,z) = \sin x$, (viii) $f(x,y,z) = yze^x$, (ix) $f(x,y,z) = \cos xy$.

15. Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = x+y^2+z^3$ sull'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 1\}.$$

16. Calcolare l'integrale triplo di $f(x,y,z) = x+y^2+z^2$ sull'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 3z^2\}.$$

17. Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = xe^y+y^2+z^3$ sull'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 3\}.$$

18. Calcolare le coordinate del baricentro della piramide avente per base il quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0,0,1)$.

19. Calcolare il volume dell'ellissoide
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \ : \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$
dove a,b,c sono costanti positive.

20. Sia Ω un solido di rotazione ottenuto ruotando intorno all'asse z una figura piana A contenuta nel semipiano verticale x,z con $x \geq 0$. Dimostrare il *secondo teorema di Guldino*:
$$\text{volume}\,(\Omega) = 2\pi\, d\ \text{area}\,(A)$$
dove d indica la distanza del baricentro di A dall'asse z. (Suggerimento: calcolare il volume usando le coordinate cilindriche, rispetto alle quali Ω diventa l'insieme dei (ρ,θ,z) tali che $(\rho,z) \in A$ e $\theta \in 2\pi$).

Per altri esercizi, vedere ad es. i §3A, 3B, 3E e gli esercizi 5.51-5.52 del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte seconda) e i §4.1, 4.2, 4.4 del libro di Salsa-Squellati.