UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 9.XI.2019

1. Descrivere i seguenti insiemi in coordinate cilindriche, nei due modi seguenti:
(i) z che varia tra estremi fissi, ρ che varia tra estremi dipendenti da z (integrazione per strati);
(ii) ρ che varia tra estremi fissi, z che varia tra estremi dipendenti da ρ (integrazione per fili).

   (a) Ω è la sfera (piena) di centro $(0,0,0)$ e raggio R.

   (b) Ω è la metà superiore della sfera del punto precedente.

   (c) Ω è il cilindro che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e altezza h (NB si sottintende un cilindro "retto", cioè con asse perpendicolare alla base).

   (d) Ω è il cono che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0,0,h)$, con $h > 0$.

   (e) Ω è il cono "rovesciato" che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = h$, con $h > 0$, e per vertice l'origine.

2. Per gli insiemi (b),(c) e (d) dell'esercizio precedente, si risponda ai seguenti quesiti

   (i) Calcolare il volume dell'insieme.

   (ii) Trovare il baricentro dell'insieme (considerando la densità unitaria).

   (iii) Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z dell'insieme.

   NB Ricordiamo che il momento di inerzia rispetto all'asse z di un insieme Ω di densità assegnata $\delta(x,y,z)$ è l'integrale

$$\int\int\int_\Omega (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

   Se la densità non è specificata, si sottintende $\delta \equiv 1$.

3. Sia $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$. Calcolare l'integrale su Ω delle funzioni

   (a) $f(x,y,z) = ze^{x^2+y^2}$.

   (b) $f(x,y,z) = (x-y-1)\operatorname{sen}\pi z$.

   (c) $f(x,y,z) = \ln(1+x^2+y^2+z^2)$.

4. Sia B la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1. Per ciascuno dei casi seguenti, descrivere in coordinate sferiche l'insieme B^* definito da

   (a) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $x \leq 0$.

   (b) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $z \leq 0$.

   (c) B^* è il quarto della sfera B con $x \geq 0$, $y \leq 0$.

   (d) B^* è il quarto della sfera B con $x \leq 0$, $z \geq 0$.

   (e) B^* è l'ottavo della sfera B con $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$.

5. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è l'ottavo di sfera $\{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 9, \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ avente densità $\delta(x,y,z) = 1+x+y$.

6. Sia Ω un cilindro omogeneo (cioè con densità costante) di base circolare di raggio 5. La massa di Ω è nota e vale 4. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto al suo asse.

7. Descrivere gli insiemi elencati sotto nei tre modi seguenti:
   (a) z che varia tra estremi fissi, ρ che varia tra estremi dipendenti da z;
   (b) ρ che varia tra estremi fissi, z che varia tra estremi dipendenti da ρ;
   (c) in coordinate sferiche, scrivendo (dove necessario) ρ che varia tra estremi dipendenti da ϕ.
   Nel seguito, si sottintende che R, a, r sono parametri positivi, con $R > r$.

   (i) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \ x^2+y^2 \leq a^2z^2, \ z \geq 0\}$
   (semisfera intersecata con un cono).

   (ii) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x^2+y^2 \geq a^2z^2, \ z \geq 0\}$.
   (semisfera privata di un cono)

   (iii) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x^2+y^2 \geq r^2\}$
   (sfera privata di un cilindro).

   (iv) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x^2+y^2 \leq r^2, z \geq 0\}$
   (semisfera intersecata con un cilindro).

   (v) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq r\}$
   (sfera tagliata da un piano non passante per il centro).

   (vi) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2\}$
   (intersezione di due sfere).

   (vii) $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2 \leq a^2z^2, x^2+y^2+(z-R)^2 \leq R^2\}$ dove $0 < a \leq 1$
   (sfera intersecata con un cono avente vertice sul bordo della sfera).

8. Calcolare il volume degli insiemi seguenti

   (i) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \ x^2 + y^2 \leq z^2, \ z \geq 0\}$

   (ii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}$.

   (iii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

   (iv) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

   (v) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, z \geq -1\}$.

   (vi) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2, \, z \leq 0\}$.

   (vii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$.

   (viii) $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4\}$.

9. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è la parte della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ compresa tra i piani di equazione $z = -1$ e $z = 0$ e avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

10. Calcolare le coordinate del baricentro dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 2, \, z \geq 0\}.$$

11. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di Ω, dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \geq z^2, \, z \geq 0\}.$$

12. Sia Ω la mezza sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare l'integrale su Ω delle seguenti funzioni:

   (i) $f(x, y, z) = |z^2 - 1|$.

   (ii) $f(x, y, z) = |x^2 + y^2 - z^2|$.

   (iii) $f(x, y, z) = |x^2 + y^2 - 1|$.

13. Sia Ω la sfera di centro l'origine e raggio 1 e sia Ω_0 la metà di Ω che giace nel semispazio $z \geq 0$. Senza fare calcoli, dire quali tra le funzioni seguenti hanno integrale nullo su Ω_0 per simmetria. Negli altri casi determinare, se possibile, il segno dell'integrale:

(i) $f(x, y, z) = 1$,	(ii) $f(x, y, z) = x$,	(iii) $f(x, y, z) = z$,
(iv) $f(x, y, z) = y^2$,	(v) $f(x, y, z) = xz$,	(vi) $f(x, y, z) = x^2 z$,
(vii) $f(x, y, z) = \sin x$,	(viii) $f(x, y, z) = yze^x$,	(ix) $f(x, y, z) = \cos xy$,
(x) $f(x, y, z) = \sin(x + y)$	(xi) $f(x, y, z) = x^3 + z^3 - z$	(xii) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.

14. Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$ sulla sfera di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^3$.

15. Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

16. Calcolare l'integrale triplo di $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}.$$

17. Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = xe^y + y^2 + z^3$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \geq 3\}.$$

18. Calcolare le coordinate del baricentro della piramide avente per base il quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0,0,1)$.

19. Sia Ω il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.
    (a) Trovare il baricentro di Ω.
    (b) Calcolare l'integrale su Ω di $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)$.

20. Calcolare il volume dell'ellissoide

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

dove a, b, c sono costanti positive.

Per altri esercizi, vedere ad es. i §3A, 3B, 3E e gli esercizi 5.51-5.52 del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte seconda) e i §4.1, 4.2, 4.4 del libro di Salsa-Squellati.