

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 6.XII.2022

1. Gli integrali richiesti valgono:

$$(a) \frac{1}{3} + \frac{\pi^2(1 - e^{-3})}{24} \quad (b) \frac{2}{3} \quad (c) \frac{e^5 - e^4 - e + 1}{2} \quad (d) \frac{e^2 + 3e^{-2}}{4} \quad (e) \frac{4}{15}.$$

$$2. (a) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{-2x} (1 - xy) \, dy \left(\text{oppure} \int_0^2 dy \int_{-1}^{-\frac{y}{2}} (1 - xy) \, dx \right) = \frac{3}{2}.$$

$$(b) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^3 dx \int_{\frac{x}{3}-1}^{-\frac{2}{3}x+2} (2x - 3y) \, dy = \frac{9}{2} \quad \text{oppure}$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{3y+3} (2x - 3y) \, dx + \int_0^2 dy \int_0^{-\frac{3}{2}y+3} (2x - 3y) \, dx = \frac{9}{2}.$$

$$(c) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_{2x}^{-x} \sin \frac{\pi}{2}(x + y) \, dy = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^0 \left(\cos \frac{3}{2}\pi x - 1 \right) dx = -\frac{4 + 6\pi}{3\pi^2}.$$

$$(d) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{\frac{x}{2}} (1 + x) \, dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\frac{x}{2}} (1 + x) \, dy = 8, \text{ oppure}$$

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-y}^{y+2} (1 + x) \, dx + \int_0^2 dy \int_{2y}^{y+2} (1 + x) \, dx = 8.$$

$$(e) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^{3-2y} (x - y) \, dx = \int_0^1 (4y^2 - 10y + 4) \, dy = \frac{1}{3}$$

$$(f) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^0 dx \int_{-x-2}^{x+3} (y + x^2) \, dy = \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2} + x + 5x^2 + 2x^3 \right) dx = \frac{19}{6}.$$

(g) Scrivendo Ω come insieme normale in coordinate cartesiane si trova:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x + y) \, dy \left(\text{oppure} \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x + y) \, dx \right) = \frac{16}{3}.$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari:

$$\int_0^2 d\rho \int_0^{\pi} \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta = \int_0^2 2\rho^2 \, d\rho = \frac{16}{3}$$

$$(h) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^4 dx \int_0^{1/x} (2x + 3xy) \, dy = 6 + 3 \ln 2.$$

$$(i) \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-1}^2 dx \int_0^{1+x^2} (x - y) \, dy = -\frac{51}{20}.$$

$$\begin{aligned}
\text{(j)} \quad \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} \frac{x^2}{(y+1)^2} \, dy \\
&= \int_{-1}^3 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = 6 - \arctan 3 - \frac{\pi}{4} - 2 \ln 5. \\
\text{(k)} \quad \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_1^3 dx \int_{x^2+3}^{4x} \frac{x}{\sqrt{y}} \, dy = \frac{8}{5}(9\sqrt{3}-1) - \frac{16}{3}(3\sqrt{3}-1).
\end{aligned}$$

3. Per trovare il baricentro, in generale, vanno calcolati tre integrali su Ω (talvolta alcuni possono essere dedotti da proprietà di simmetria o in base a note proprietà sull'area di figure piane). Per brevità, scriviamo l'impostazione del primo integrale per ciascuna domanda, limitandoci a scrivere il risultato finale degli altri. Usiamo la notazione $|\Omega|$ per l'area di Ω e $(\bar{x}, \bar{y})$ per il baricentro.

$$\text{(a)} \quad |\Omega| = \int_0^1 dx \int_{x^2-x}^0 dy = \frac{1}{6}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10} \right).$$

$$\text{(b)} \quad |\Omega| = \int_{-2}^2 dy \int_{2y^2}^{y^2+4} dx = \frac{32}{3}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{16}{5}, 0 \right).$$

- (c) Ω è la differenza di due semicerchi di raggio 2 e di raggio 1. Ricordando la formula per l'area del cerchio, troviamo dapprima

$$|\Omega| = \frac{1}{2}(4\pi) - \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

La coordinata $\bar{x}$ è nulla per simmetria. Per calcolare $\bar{y}$ possiamo scrivere Ω come dominio normale, al modo seguente

$$\bar{y} = \left(\frac{3}{2}\pi \right)^{-1} \left(\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy - \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) = \frac{28}{9\pi},$$

oppure, più rapidamente, usando le coordinate polari,

$$\bar{y} = \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi d\theta \int_1^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho = \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi \frac{7}{3} \sin \theta \, d\theta = \frac{28}{9\pi}.$$

4. Risolviamo gli integrali passando in coordinate polari. In tutti gli esercizi considerati, è possibile invertire l'ordine di integrazione tra ρ e θ senza sostanziali differenze nella lunghezza del calcolo.

$$\text{(a)} \quad \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 2\rho^2(\cos \theta + \sin \theta) \, d\rho = \frac{32}{3}.$$

$$\text{(b)} \quad \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^3 \cos^2 \theta - \rho^2 \cos \theta) \, d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}.$$

NB è sbagliato mettere come estremi $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$ oppure $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta$.

$$\text{(c)} \quad \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^3 (1 - \rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho \, d\rho = \frac{9}{4}\pi - \frac{81}{8}.$$

$$(d) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) d\rho = \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1).$$

$$(e) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 (2\rho^2 + \rho \sin \theta) \rho d\rho = 65\pi.$$

$$(f) \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} d\theta \int_2^4 \ln(\rho^2) \rho d\rho = \pi(14 \ln 2 - 3).$$

(g) Usando coordinate polari centrate in $(1, 1)$, cioè $x = 1 + \cos \theta$, $y = 1 + \sin \theta$, si ottiene

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 + \rho(\cos \theta + \sin \theta)) \rho d\rho = 2\pi.$$

(h) Usiamo coordinate polari centrate in (x_0, y_0) , cioè $x = x_0 + \rho \cos \theta$, $y = y_0 + \rho \sin \theta$:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (x_0 + \rho \cos \theta - y_0 - \rho \sin \theta) \rho d\rho = \pi(x_0 - y_0)$$

5. Osserviamo che T e S non hanno punti interni in comune, quindi possiamo calcolare separatamente i due contributi. Usando coordinate cartesiane per T e polari per S , troviamo

$$\iint_T (2 - xy) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^{3-\frac{y}{2}} (2 - xy) dx = \frac{9}{2},$$

$$\iint_S (2 - xy) dx dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_0^1 [2 - \rho \cos \theta (\rho \sin \theta + 1)] \rho d\rho = \pi + \frac{2}{3}$$

e concludiamo che l'integrale richiesto vale $\frac{9}{2} + \pi + \frac{2}{3} = \pi + \frac{31}{6}$.

6. Abbiamo $m(T \cup S) = m(T) + m(S) = 2 + 2\pi$. Si ha $\bar{x} = 0$ perché la figura è simmetrica rispetto all'asse y . Per quanto riguarda l'altra coordinata, calcoliamo

$$\iint_T y dx dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} y dx = \int_0^1 4y^2 dy = \frac{4}{3}.$$

$$\iint_S y dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^2 (1 + \rho \sin \theta) \rho d\rho = \int_0^\pi \left(2 + \frac{8}{3} \sin \theta \right) d\theta = 2\pi + \frac{16}{3},$$

da cui segue

$$\bar{y} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi + \frac{16}{3}}{2 + 2\pi} = \frac{10 + 3\pi}{3(1 + \pi)}.$$

7. Abbiamo $m(T \cup S) = m(T) + m(S) = 6 + \pi$. Inoltre

$$\iint_T x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{3-x} x \, dy = \int_{-1}^1 x(3-x) \, dx = -\frac{2}{3}.$$

$$\iint_T y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^{3-x} y \, dy = \int_{-1}^1 \frac{(3-x)^2}{2} \, dx = \frac{28}{3}.$$

$$\iint_S x \, dx \, dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos \theta \, d\rho = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2}{3} \sqrt{2} \cos \theta \, d\theta = \frac{4}{3},$$

$$\iint_S y \, dx \, dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (3 + \rho \sin \theta) \rho \, d\rho = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(3 + \frac{2}{3} \sqrt{2} \sin \theta \right) d\theta = 3\pi + \frac{4}{3},$$

da cui segue

$$\bar{y} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{6 + \pi} = \frac{2}{3(6 + \pi)}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{28}{3} + 3\pi + \frac{4}{3}}{6 + \pi} = \frac{32 + 9\pi}{3(6 + \pi)}.$$

8. (a) Scriviamo Ω come differenza di un settore circolare e di un triangolo:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \, d\rho - \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{3}y}^{\sqrt{3}y} (x^2 + y^2) \, dx = \frac{8}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

(b) Scriviamo Ω come differenza di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(0, -1)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} [\rho^2 \cos^2 \theta + (\rho \sin \theta - 1)^2] \rho \, d\rho - \int_{-1}^0 dy \int_{-y-1}^{y+1} (x^2 + y^2) \, dy \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[2 - \frac{4}{3} \sqrt{2} \sin \theta \right] d\theta - \int_{-1}^0 \left[\frac{2}{3} (y+1)^3 + 2y^2(y+1) \right] dy \\ &= \pi - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \pi - 3. \end{aligned}$$

(c) Scriviamo Ω come differenza di un quarto di cerchio e di un triangolo:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta)^2 \rho \, d\rho - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)^2 \, dy = \frac{\pi}{8}$$

(d) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(0, 1)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} d\theta \int_0^2 (\rho^3(1 + 2 \cos \theta \sin \theta) + 2\rho^2(\cos \theta + \sin \theta) + \rho) \, d\rho \\ &\quad + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{3}(y-1)}^{\sqrt{3}(1-y)} (x+y)^2 \, dx = 8\pi + \frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = 8\pi + 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

- (e) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(-1, 0)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 - 2\rho \cos \theta + 1) \rho d\rho + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cos \theta \right) d\theta + \int_{-1}^0 -\frac{4}{3} x^3 dx = \frac{2}{3} + \frac{9}{8}\pi + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- (f) Scriviamo Ω come unione di un settore circolare e di un triangolo, usando coordinate polari centrate in $(1, 0)$ per il settore circolare:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (\rho^3 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \sin \theta + \rho) d\rho + \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{1-\frac{x}{\sqrt{3}}} (x^2 + y^2) dx \\ &= \left(4\pi + \frac{8}{3}\sqrt{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\pi + 3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

9. In questi due esercizi, la descrizione del dominio in coordinate polari centrate in $(0, 0)$ richiede che una delle due coordinate abbia estremi variabili in funzione dell'altra. Questa scelta di coordinate semplifica la forma della funzione integranda e porta a calcoli più rapidi.

- (a)

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{1/\cos \theta} \frac{(\rho \cos \theta)^2}{\rho^3} \rho d\rho = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta = \sqrt{2}.$$

- (b) Conviene dividere il dominio in due parti, sopra e sotto la retta $y = x$, trovando

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos \theta} d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^{1/\sin \theta} d\rho = \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\pi}{2}.$$

(notare che la funzione integranda si semplifica con lo jacobiano delle coordinate polari).

10. Segue direttamente dalla formula di riduzione su rettangoli, osservando che $f(x)$ (risp. $g(y)$) si comporta come una costante nell'integrazione in dy (risp. in dx).

11. (a) Usando le coordinate polari troviamo

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

- (b) Osservando che $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ e usando la proprietà dell'esercizio 10, abbiamo

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

- (c) La funzione integranda è positiva, quindi l'integrale aumenta all'ingrandirsi dell'insieme. Questo implica che sia l'integrale su C_R che quello su Q_R cresce al crescere di R , quindi

tende a un limite, eventualmente $+\infty$. Per confrontare i limiti, osserviamo che, essendo $C_R \subset Q_R$, si ha

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

che implica

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Essendo d'altra parte $Q_R \subset C_{2R}$, abbiamo anche

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{2R}} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

da cui segue, mandando $R \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

che unita alla disuguaglianza opposta trovata prima dà l'uguaglianza richiesta.

(d) Per la proprietà (a), abbiamo da un lato

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

Dall'altro, per la (b):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Poiché i due limiti coincidono per quanto trovato in (c), otteniamo la conclusione.