

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 5.XII.2022

1. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y)$ sul rettangolo R , dove

(a) $f(x, y) = y^2 \sin 2x + xe^{-3y}$, $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$

(b) $f(x, y) = x^3y + x^2 + e^xy^3$, $R = [0, 1] \times [-1, 1]$,

(c) $f(x, y) = e^{2y-x}$, $R = [-1, 0] \times [0, 2]$,

(d) $f(x, y) = y^2e^{xy}$, $R = [0, 2] \times [-1, 1]$,

(e) $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $R = [1, 3] \times [0, 2]$.

2. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y)$ su Ω nei casi seguenti

(a) $f(x, y) = 1 - xy$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, 2)$.

(b) $f(x, y) = 2x - 3y$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0, -1)$, $(0, 2)$ e $(3, 0)$.

(c) $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{2}(x+y)$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(-1, -2)$, $(-1, 1)$ e $(0, 0)$.

(d) $f(x, y) = 1 + x$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(4, 2)$.

(e) $f(x, y) = x - y$, $\Omega =$ trapezio di vertici $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ e $(3, 0)$.

(f) $f(x, y) = y + x^2$, $\Omega =$ trapezio di vertici $(-1, -1)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(0, -2)$.

(g) $f(x, y) = x + y$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

(h) $f(x, y) = 2x + 3xy$, $\Omega = \{(x, y) : x \in [1, 4], 0 \leq y \leq 1/x\}$.

(i) $f(x, y) = x - y$, $\Omega = \{(x, y) : x \in [-1, 2], 0 \leq y \leq 1 + x^2\}$.

(j) $f(x, y) = \frac{x^2}{(y+1)^2}$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2x + 3\}$.

(k) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 3 \leq y \leq 4x\}$.

3. Calcolare il baricentro dei seguenti insiemi:

(a) $\Omega = \{(x, y) : x^2 - x \leq y \leq 0\}$.

(b) $\Omega = \{(x, y) : 2y^2 \leq x \leq y^2 + 4\}$.

(c) $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

4. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y)$ su Ω nei casi seguenti
- (a) $f(x, y) = 2x + 2y$, Ω = semicerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$.
 - (b) $f(x, y) = x^2 - x$, Ω = semicerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano $x \leq 0$.
 - (c) $f(x, y) = 1 - xy$, Ω = quarto di cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 3 contenuto nel quadrante $x \leq 0, y \leq 0$.
 - (d) $f(x, y) = y + x$, Ω = settore del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2, contenuto nel semipiano delle $y \geq 0$ e delimitato dalle rette di equazione $y = -x$ e $y = \sqrt{3}x$.
 - (e) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + y$, Ω = corona circolare di raggi 2 e 3 e centro $(0, 0)$.
 - (f) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, Ω = porzione della corona circolare di raggi 2 e 4 e centro $(0, 0)$ compresa nel quadrante $x \geq 0, y \leq 0$.
 - (g) $f(x, y) = x + y$, Ω = cerchio di raggio 1 e centro $(1, 1)$.
 - (h) $f(x, y) = x - y$, Ω = cerchio di raggio 1 e centro (x_0, y_0) per un generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
5. Sia T il trapezio di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ e $(3, 0)$ e sia S il semicerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1 nel semipiano $x \leq 0$. Calcolare l'integrale doppio su $T \cup S$ della funzione $f(x, y) = 2 - xy$.
6. Sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(-2, 1)$, $(2, 1)$ e sia S il semicerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 1$. Calcolare il baricentro di $T \cup S$.
7. Sia T il trapezio di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 4)$ e sia S semicerchio di centro $(0, 3)$ e raggio $\sqrt{2}$ contenuto nel semipiano $x + y \geq 3$. Calcolare il baricentro di $T \cup S$.
8. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y)$ su Ω nei casi seguenti (suggerimento: scrivere Ω come unione, o differenza, di un settore circolare e di un triangolo opportunamente scelti, e svolgere i due integrali così ottenuti rispettivamente in coordinate polari e cartesiane).
- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, Ω = porzione del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2 che si trova sopra la retta $y = 1$.
 - (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + (y + 1)^2 \leq 2, y \geq 0\}$.
 - (c) $f(x, y) = (x + y)^2$, $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$.
 - (d) $f(x, y) = (x + y)^2$, Ω = porzione del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 2 che si trova sopra l'asse x .
 - (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x, y) : (x + 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$.
 - (f) $f(x, y) = x^2 + y^2$, Ω = porzione del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 2 che si trova nel quadrante $x \geq 0, y \geq 0$.

9. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y)$ su Ω nei casi seguenti, usando coordinate polari centrate nell'origine.

(a) $f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\Omega =$ il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

(b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\Omega =$ la parte del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ esterna al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

10. Mostrare che, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ allora

$$\iint_{\Omega} f(x)g(y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \left(\int_c^d g(y) \, dy \right).$$

11. (Calcolo dell'integrale improprio di una variabile $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ con gli integrali doppi)
Per ogni $R > 0$, indichiamo con C_R il cerchio di centro l'origine e raggio R , e con Q_R il quadrato $[-R, R] \times [-R, R]$.

(a) Calcolare $\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$.

(b) Mostrare che $\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx \right)^2$
(sugg. usare la proprietà dell'esercizio 10)

(c) Mostrare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy.$$

(sugg. usare le inclusioni $C_R \subset Q_R \subset C_{2R}$).

(d) Usare i punti precedenti per mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Per altri esercizi, vedere ad es. i §3A, 3B, 3E e gli esercizi 5.51-5.52 del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte seconda) e i §4.1, 4.2, 4.4 del libro di Salsa-Squellati.