

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 11.I.2020

1. Di ciascuna delle seguenti funzioni, calcolare l'integrale lungo la curva di equazione $\gamma(t) = (t^4 + \cos \frac{\pi}{2}t) + i \sin \frac{\pi}{2}t$, per $t \in [0, 1]$:

$$(a) f(z) = 4z^2, \quad (b) f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad (c) f(z) = e^{\pi z}.$$

2. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla curva γ data dal bordo del rettangolo di vertici $-10, 10, 10 + 2i$ e $-10 + 2i$ (qui e nel seguito si sottintende che le curve chiuse semplici sono orientate positivamente).

$$(a) f(z) = \frac{1}{1+z^6}, \quad (b) f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}, \quad (c) f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}.$$

3. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulle curve γ_1 e γ_2 , dove γ_1 è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 mentre γ_2 è la circonferenza di centro 0 e raggio 10

$$(a) f(z) = \frac{z^2+1}{e^z-1}, \quad (b) f(z) = \frac{z}{e^z+1}, \quad (c) f(z) = \frac{2z}{e^z+i}.$$

4. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro 0 e raggio 5.

$$(a) f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1}, \quad (b) f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2-\pi^2}.$$

5. Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sulla circonferenza di centro $2i$ e raggio 2

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^4+1}, \quad (b) f(z) = \frac{z^4}{z^6+1}, \quad (c) f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^2+1}.$$

6. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{1}{z^3-8}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z = -1$ e raggio R . Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R .

7. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4+4}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z = -2$ e raggio R . Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R .

8. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{z^2}{e^{\pi z}-i}$, e si indichi con γ_R la circonferenza di centro l'origine e raggio R . Calcolare l'integrale di f su γ_R quando $R = 2$. Dire se esiste finito il limite dell'integrale per $R \rightarrow +\infty$.

Vedere anche, ad esempio, gli esercizi del capitolo 18 del libro di Bertsch-Dal Passo-Giacomelli.