

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 16.I.2019

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $y'' + 4y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 3, y'(0) = -4$.
- (b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
- (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = -2$.
- (d) $y'' + y' - 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = -1, y'(0) = 0$.
- (e) $y'' - 6y' + 9y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 2, y'(0) = -1$.

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $y''' + 4y' = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = -2, y''(0) = 8$.
- (b) $y''' + 2y'' = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$.
- (c) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1$.
- (d) $y^{(iv)} + 4y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 2, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

3. Trovare un integrale particolare delle seguenti equazioni:

- (a) $y'' + 3y' = 2 \sin x$.
- (b) $y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$.
- (c) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.
- (d) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$.

4. Fissati $A, \omega > 0$ trovare un integrale particolare dell'equazione

$$y'' + \omega^2 y = A \sin(\omega x).$$

Suggerimento: si può usare il metodo della variazione delle costanti, oppure si può cercare una soluzione della forma $y(x) = x(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x))$, con α, β costanti opportune.

5. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

- (a) $y'' + 4y' - 21y = 3e^{2x}$
- (b) $y'' + 6y' + 8y = 16x^2 - 14$
- (c) $y'' + 9y = 2e^x + 9x - 18$
- (d) $y'' - 4y' + 20y = 10e^{4x} - 5x + 1$.

6. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

- (a) $y'' + 2y' + 5y = 15x + 16$ con condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2$
- (b) $y'' - 6y' + 10y = 5x - 18$ con condizioni iniziali $y(0) = -1, y'(0) = 2$.
- (c) $y'' + 4y' + 4y = 32e^{2x}$ con condizioni iniziali $y(0) = 3, y'(0) = 1$.
- (d) $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}$ con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

7. Sia $a > 0$ un parametro reale. Si dica per quali valori di a il problema

$$y'' + ay = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

possiede soluzioni diverse da quella nulla.

8. Sia $\omega > 0$ un parametro reale. Discutere, al variare di ω , il numero di soluzioni dell'equazione

$$y'' + \omega^2 y = \frac{2}{\pi} \sin(\omega x)$$

rispettivamente con le seguenti condizioni:

- (a) $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$.
- (b) $y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0$.
- (c) $y(0) = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{3}$.

9. Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + ky = 0$$

dove k è un parametro reale. Dire per quali valori di k valgono le proprietà seguenti:

- (a) Tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$.
- (b) Esiste almeno una soluzione (oltre a quella nulla) dell'equazione che tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$.
- (c) Tutte le soluzioni dell'equazione si annullano infinite volte.

10. Si consideri l'equazione

$$y'' + ky' + 4y = e^x$$

dove k è un parametro reale positivo. Mostrare che, qualunque sia il valore di $k > 0$ valgono le proprietà seguenti:

- (a) Tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione tendono a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (b) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione (per lo stesso valore di k) allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) - y_2(x) = 0$.

11. In ciascuno dei casi seguenti, dire se l'insieme descritto è un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $y(x)$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

- (a) Le funzioni $y(x)$ tali che $y(1) = 0$.
- (b) Le funzioni $y(x)$ tali che $y(0) = 1$.
- (c) Le funzioni $y(x)$ periodiche di periodo 2π .
- (d) Le funzioni tali che $y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Le funzioni continue.
- (f) Le funzioni positive.
- (g) Le funzioni di segno costante.
- (h) I polinomi.
- (i) Le funzioni tali che $\frac{y(x)}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.
- (j) Le soluzioni dell'equazione $y'' + x^3 y' + (\sin x)y = 0$.
- (k) Le soluzioni dell'equazione $y' + xy^2 = 0$.
- (l) Le soluzioni dell'equazione $y'' + y = 1$.

12. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione lineare

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

con $b(x) \neq 0$. Definiamo $w(x) = y_1(x) + y_2(x)$ e $z(x) = 2y_1(x) - y_2(x)$. Dire se w e/o z sono anch'esse soluzioni dell'equazione.

13. In ciascuno dei casi seguenti, dire se le funzioni $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ sono linearmente indipendenti.

- (a) $y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2$.
- (b) $y_1(x) = 2 + x^2, y_2(x) = x^2 - 1, y_3(x) = x^2$.
- (c) $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = x \sin x, y_3(x) = \sin x + \cos x$.

14. Mostrare che, per ogni n intero positivo, le n funzioni

$$y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, \dots, y_n(x) = x^n$$

sono elementi linearmente indipendenti di $C^\infty(\mathbb{R})$. (Si può dare per nota la proprietà che se un polinomio $P(x)$ di grado qualunque si annulla per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora i suoi coefficienti sono necessariamente tutti nulli). Dedurne che lo spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R})$ ha dimensione infinita.

Vedere anche ad es. il §4B, 4C, 4E del libro di Marcellini-Sbordone (vol.2 parte prima) e il §5.2 del libro di Salsa-Squellati.