

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 11.I.2019

1. Di ciascuna delle seguenti funzioni, calcolare l'integrale lungo la curva di equazione $\phi(t) = (t^4 + \cos \frac{\pi}{2}t) + i \sin \frac{\pi}{2}t$, per $t \in [0, 1]$:

$$(a) \ f(z) = 4z^2, \quad (b) \ f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad (c) \ f(z) = e^{\pi z}.$$

2. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla curva γ data dal bordo del rettangolo di vertici $-10, 10, 10+2i$ e $-10+2i$ (qui e nel seguito si sottintende che le curve chiuse semplici sono orientate positivamente).

$$(a) \ f(z) = \frac{1}{1+z^6}, \quad (b) \ f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}, \quad (c) \ f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}.$$

3. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulle curve γ_1 e γ_2 , dove γ_1 è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 mentre γ_2 è la circonferenza di centro 0 e raggio 10

$$(a) \ f(z) = \frac{z^2+1}{e^z-1}, \quad (b) \ f(z) = \frac{z}{e^z+1}, \quad (c) \ f(z) = \frac{2z}{e^z+i}.$$

4. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro 0 e raggio 5.

$$(a) \ f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}, \quad (b) \ f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2-\pi^2}.$$

5. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{1}{z^3-8}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z = -1$ e raggio R , percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R .

6. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{z^2}{e^{\pi z}-i}$, e si indichi con γ_R la circonferenza di centro l'origine e raggio R , percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale di f su γ_R quando $R = 2$. Dire se esiste finito il limite dell'integrale per $R \rightarrow +\infty$.

7. Calcolare i seguenti integrali impropri reali, riconducendoli a opportuni integrali complessi e utilizzando il teorema dei residui.

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 + 1} dx.$$

8. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4 + 4}$.

- (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = -2$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.
- (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse immaginario).

Vedere anche, ad esempio, gli esercizi del capitolo 18 del libro di Bertsch-Dal Passo-Giacomelli.