

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 1.XII.2018

1. Sia Ω il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
 - (a) Trovare il baricentro di Ω .
 - (b) Calcolare l'integrale su Ω di $f(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x + y + z)\right)$.
2. Descrivere i seguenti insiemi in coordinate cilindriche, nei due modi seguenti:
 - (i) z che varia tra estremi fissi, ρ che varia tra estremi dipendenti da z (integrazione per strati);
 - (ii) ρ che varia tra estremi fissi, z che varia tra estremi dipendenti da ρ (integrazione per fili).
 - (a) Ω è la sfera (piena) di centro $(0, 0, 0)$ e raggio R .
 - (b) Ω è la metà superiore della sfera del punto precedente.
 - (c) Ω è il cilindro che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e altezza h (NB si sottintende un cilindro “retto”, cioè con asse perpendicolare alla base).
 - (d) Ω è il cono che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0, 0, h)$, con $h > 0$.
 - (e) Ω è il cono “rovesciato” che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = h$, con $h > 0$, e per vertice l'origine.
3. Per gli insiemi (b),(c) e (d) dell'esercizio precedente, si risponda ai seguenti quesiti
 - (i) Calcolare il volume dell'insieme.
 - (ii) Trovare il baricentro dell'insieme (considerando la densità unitaria).
 - (iii) Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z dell'insieme.

NB Ricordiamo che il momento di inerzia rispetto all'asse z di un insieme Ω di densità assegnata $\delta(x, y, z)$ è l'integrale

$$\int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

Se la densità non è specificata, si sottintende $\delta \equiv 1$.

4. Sia B la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1. Per ciascuno dei casi seguenti, descrivere in coordinate sferiche l'insieme B^* definito da
- (a) B^* è la semisfera ottenuta inteseccando B col semispazio $x \leq 0$.
 - (b) B^* è la semisfera ottenuta inteseccando B col semispazio $z \leq 0$.
 - (c) B^* è il quarto della sfera B con $x \geq 0, y \leq 0$.
 - (d) B^* è il quarto della sfera B con $x \leq 0, z \geq 0$.
 - (e) B^* è l'ottavo della sfera B con $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$.
5. Calcolare la massa di Ω , dove Ω è l'ottavo di sfera $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x + y$.
6. Sia Ω un cilindro omogeneo (cioè con densità costante) di base circolare di raggio 5. La massa di Ω è nota e vale 4. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto al suo asse.
7. Descrivere gli insiemi elencati sotto nei tre modi seguenti:
- (a) z che varia tra estremi fissi, ρ che varia tra estremi dipendenti da z ;
 - (b) ρ che varia tra estremi fissi, z che varia tra estremi dipendenti da ρ ;
 - (c) in coordinate sferiche, scrivendo (dove necessario) ρ che varia tra estremi dipendenti da ϕ .

Nel seguito, si sottintende che R, a, r sono parametri positivi, con $R > r$.

- (i) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq a^2 z^2, z \geq 0\}$
(semisfera intersecata con un cono).
- (ii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \geq a^2 z^2, z \geq 0\}$.
(semisfera privata di un cono)
- (iii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \geq r^2\}$
(sfera privata di un cilindro).
- (iv) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq r^2, z \geq 0\}$
(semisfera intersecata con un cilindro).
- (v) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq r\}$
(sfera tagliata da un piano non passante per il centro).
- (vi) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}$
(intersezione di due sfere).
- (vii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 z^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}$ dove $0 < a \leq 1$
(sfera intersecata con un cono avente vertice sul bordo della sfera).

8. Calcolare il volume degli insiemi seguenti

- (i) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$
- (ii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}$.
- (iii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
- (iv) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 2\}$.
- (v) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq -1\}$.
- (vi) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 2, z \leq 0\}$.
- (vii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$.
- (viii) $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\}$.

9. Calcolare la massa di Ω , dove Ω è la parte della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ compresa tra i piani di equazione $z = -1$ e $z = 0$ e avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

10. Calcolare le coordinate del baricentro dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z + 1)^2 \leq 2, z \geq 0\}.$$

11. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di Ω , dove

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq z^2, z \geq 0\}.$$

12. Sia Ω la sfera di centro l'origine e raggio 1 e sia Ω_0 la metà di Ω che giace nel semispazio $z \geq 0$. Senza fare calcoli, dire quali tra le funzioni seguenti hanno integrale nullo su Ω_0 per simmetria. Negli altri casi determinare, se possibile, il segno dell'integrale:

- (i) $f(x, y, z) = 1$, (ii) $f(x, y, z) = x$, (iii) $f(x, y, z) = z$,
- (iv) $f(x, y, z) = y^2$, (v) $f(x, y, z) = xz$, (vi) $f(x, y, z) = x^2z$,
- (vii) $f(x, y, z) = \sin x$, (viii) $f(x, y, z) = yze^x$, (ix) $f(x, y, z) = \cos xy$,
- (x) $f(x, y, z) = \sin(x + y)$ (xi) $f(x, y, z) = x^3 + z^3 - z$ (xii) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.

13. Calcolare l'integrale di $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

14. Calcolare l'integrale triplo di $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}.$$

15. Calcolare l'integrale di $f(x, y, z) = xe^y + y^2 + z^3$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 3\}$$

Per altri esercizi, vedere ad es. i §3A, 3B, 3E e gli esercizi 5.51-5.52 del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte seconda) e i §4.1, 4.2, 4.4 del libro di Salsa-Squellati.