UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 12.X.2018

1. In ciascuno dei seguenti casi, dire se l'insieme Ω è aperto, chiuso o né l'una né l'altra cosa, e determinare la sua frontiera $\partial\Omega$, la sua parte interna $\overset{\circ}{\Omega}$ e la sua chiusura $\overline{\Omega}$.

   (a) $\Omega = (0,1) \cup (2,+\infty)$

   (b) $\Omega = [0,1)$

   (c) $\Omega = [0,1] \cup \{2\} \cup [3,\infty)$

   (d) $\Omega = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

   (e) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x < 1, 0 < y \leq 1\}$

   (f) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (1,3], y = 0\}$

   (g) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{ razionali } \}$

   (h) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x \neq 0, y = \text{ sen } \frac{1}{x}\}$

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \notin \Omega$. Mostrare che $x_0 \in \partial\Omega$ se e solo se x_0 è di accumulazione per Ω.

3. Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema di Rolle*). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$, che assume un valore costante su tutti i punti di ∂D. Allora esiste $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.

4. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$. Supponiamo che $f > 0$ su $\overset{\circ}{D}$, che $f \equiv 0$ su ∂D e che esista un unico punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ critico per f. Mostrare che x_0 è un punto di massimo locale per f.

5. Sia $f(x,y) = \text{ sen}\,(2x^2 - x - y) + \dfrac{x}{(y+1)^2}$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$ e la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ nella direzione di $\mathbf{v} = (1,2)$.

6. Sia $f(x,y,z) = xyz^2 + \dfrac{e^{x+y}}{z}$. Determinare l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(2,-2,1,f(2,-2,1))$ e la derivata direzionale di f nel punto $(2,-2,1)$ nella direzione di $\mathbf{v} = (0,2,-1)$. (Nell'equazione dell'iperpiano tangente, si può usare la lettera w per denotare la quarta variabile).

7. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Mostrare che $f(x,y)$ possiede le derivate parziali in tutti i punti (compreso $(0,0)$), ma che non è continua in $(0,0)$. Verificare che le derivate parziali di f non sono continue in $(0,0)$.

8. Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Mostrare che $f(x,y)$ possiede tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ e che valgono tutte zero. Mostrare che f non è continua in $(0,0)$.

9. Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x,y)$. Mostrare che f è una funzione convessa (suggerimento: ricordarsi della disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla norma).

10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe C^1. Mostrare che, se x è un punto critico per f, allora x è un punto di minimo assoluto per f.

11. Mostrare che, se $n > 2$, allora una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ può avere un punto critico dove la matrice hessiana ha determinante e traccia positivi senza che il punto sia di minimo.

12. Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e una $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri la funzione composta $g(x,y) = \phi(f(x,y))$.
    (a) Mostrare che, se ϕ è monotona, allora c'è una relazione tra i punti di estremo locale di f e quelli di g.
    (b) Supponiamo che f, ϕ siano di classe C^1. Mostrare che, in generale, i punti critici di f sono critici anche per g ma che non vale sempre il viceversa. Mostrare che f, g hanno gli stessi punti critici se in più si suppone che ϕ' non si annulli mai.

13. Per ciascuna delle seguenti funzioni, trovare i punti critici e studiarne la natura; dire cioè se sono punti di massimo relativo, o di minimo relativo, o nessuna delle due cose.

   (a) $f(x, y) = x^2 e^y - y^2 + y$
   (b) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$
   (c) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^3$
   (d) $f(x, y) = \exp(1 - x^2 + y^2)$
   (e) $f(x, y) = xy(1 + x + y)$
   (f) $f(x, y) = \exp(4x - x^2 - 4y^2 - 3)$
   (g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - e^4 x^2$
   (h) $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y.$
   (i) $f(x, y, z) = 2y(x + z + 1) - 3y^2 - x^2 - z^2.$
   (j) $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x.$
   (k) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2} y^2 z.$

14. Sia $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$. Mostrare che, presa qualunque retta passante per $(0, 0)$, la restrizione di f su quella retta ha un minimo locale in $(0, 0)$ (cioè, per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $t \to f(at, bt)$ ha un minimo locale per $t = 0$). Mostrare che $(0, 0)$ non è di minimo locale per f.

15. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se l'origine $(0, 0)$ è un punto di massimo, o di minimo o nessuno dei due. Nel caso di massimo o minimo, determinare se è relativo o assoluto, stretto o non stretto.

   (a) $f(x, y) = x^2(\cos y - 1)$
   (b) $f(x, y) = (1 + x^3)(1 - y^2)$
   (c) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^3 y$
   (d) $f(x, y) = \sin(x^2 y^2)$
   (e) $f(x, y) = (1 + x^2 y^4)^{-1}$
   (f) $f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^3)$
   (g) $f(x, y) = x^2 y^3$
   (h) $f(x, y) = (x^2 y^2 - 1)^2$
   (i) $f(x, y) = e^{x^2} + y^4 + 1$
   (l) $f(x, y) = \cos(xy) - \operatorname{sen}^2(x + y)$
   (m) $f(x, y) = (x + y)^5$
   (n) $f(x, y) = (x - y)^4 - 1$
   (o) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + x^3$
   (p) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy^3$
   (q) $f(x, y) = x^4(y^3 - 1) + 1$
   (r) $f(x, y) = y(y - x^2).$

16. Nei casi seguenti, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

   (a) $f(x,y) = x^2 - 1 + 2(4-x)y^4$
   (b) $f(x,y) = x^4 - y^4 - x^3 + xy^2 + 1$
   (c) $f(x,y) = (x^4 - y^2)(y-3)$
   (d) $f(x,y) = x^4(1-2y) + 2y^2 - 1$.

17. Nei casi seguenti, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

   (a) $f(x,y) = (x+y-1)^2 + ax^4$.
   (b) $f(x,y) = (y-x^2)(y-a)$.
   (c) $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x-a)$.
   (d) $f(x,y) = x^2(y-a) - 2y^2$.
   (e) $f(x,y) = xy(x+y-3a)$.

18. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(2/3, -4/3)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$.
   (b) Dire quali tra i punti $P_1 = (-\sqrt{2}, 2), P_2 = (2,0), P_3 = (0,4)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2y + 1$.
   (c) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nell'origine

   $$f(x,y) = e^{x^2-2y^2}, \qquad g(x,y) = x(x-1) - 4xy + 5y^2, \qquad h(x,y) = (x^3-1)y^2.$$

   (d) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,1)$

   $$f(x,y) = \ln(2y + 2x^2 - y^2), \qquad g(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^3$$
   $$h(x,y) = \cos(x^2) - \operatorname{sen}((y-1)^2) + 1.$$

Altri esercizi si possono trovare ad es. nei §3D, 3E, 3G, 3H (2° volume, parte prima) e nei §1A, 1B, 1C (2° volume, parte seconda) del libro di Marcellini-Sbordone, e nei §2.2 e 2.3 del libro di Salsa-Squellati.

AVVERTENZA: Ai fini della preparazione della prova scritta, gli esercizi significativi sono i nn. 13–18. In particolare, alla prova scritta non verranno proposti esercizi su limiti, continuità, derivabilità e differenziabilità.

Gli esercizi nn. 1–12 sono raccomandati per una migliore comprensione della teoria. In particolare, fa parte del programma per l'esame orale la conoscenza delle funzioni degli esercizi nn. 7-8-9 o di funzioni con proprietà analoghe.