UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi su equazioni differenziali (prima parte) — 3/10/22

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' - xy = 2x \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' - yx = x \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' - 2y = e^{3x} \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' + y = 2xe^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = 2\cos(x^2) \\ y\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = 3e^{x^3} \\ y(1) = 3e. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \operatorname{sen}^2 x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{(2+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy. Specificare (facoltativo) l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

(a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y^2(x+1) \\ y(0) = 2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = (1+y^2)xe^{-x^2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' = y^3 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{x-y}}{e^x - 2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos x}{y+2} \\ y(0) = -5. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{(1+y)(1+x^2)} \\ y(0) = -3. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{2y}}{x+2} \\ y(-1) = 0. \end{cases}$

3. Risolvere l'equazione $y' = y^2 - y - 2$ con condizioni iniziali:

   (a) $y(0) = -2$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 2$.

4. Risolvere l'equazione $y' = 1 - y^2$ con condizioni iniziali:

   (a) $y(0) = 0$ (b) $y(0) = 1$ (c) $y(0) = 2$.

5. Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{y^2 - 3y}{x}$ con condizioni iniziali:

   (a) $y(1) = 0$ (b) $y(1) = 1$ (c) $y(1) = 4$.

6. Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{e^x}{y}$ con condizioni iniziali:

   (a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = -1$.

7. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

   (a) $\begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(0) = \pi. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$

8. Per ciascuna delle equazioni seguenti, scrivere l'integrale generale in funzione della condizione iniziale y_0. Inoltre dire per quali valori di y_0 la soluzione è globale (cioè definita per ogni $x \in \mathbb{R}$).

   (a) $\begin{cases} y' = y^2 \cos x \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = -xy^4 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{1+x^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' = e^{y-2x} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$