UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 20.XII.2021

1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} y' = 2y + e^{3x} \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = -y + 2xe^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = 2\cos(x^2) \\ y\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = 3e^{x^3} \\ y(1) = 3e. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \operatorname{sen}^2 x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{(2+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0. \end{cases}$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy (indicando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione)

(a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y^2(x+1) \\ y(0) = 2. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = (1+y^2)(x+2) \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' = y^3 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = 2y + 3 \\ y(0) = -3. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' = yx + x \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y' = 2x + xy \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y' = e^{-y}(\operatorname{sen} x + 2x) \\ y(1) = 0. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{(1+y)(1+x^2)} \\ y(0) = -3. \end{cases}$ (l) $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{2y}}{x+2} \\ y(-1) = 0. \end{cases}$

3. Risolvere l'equazione $y' = y^2 - y - 2$ con condizioni iniziali:

(a) $y(0) = -2$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 2.$

4. Risolvere l'equazione $y' = 1 - y^2$ con condizioni iniziali:

(a) $y(0) = 0$ (b) $y(0) = 1$ (c) $y(0) = 2.$

5. Risolvere l'equazione $y' = \dfrac{e^x}{y}$ con condizioni iniziali:

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = -1.$

6. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y'' + 4y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.
(b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.
(d) $y'' + y' - 2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
(e) $y'' - 6y' + 9y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

7. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y''' + 4y' = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 8$.
(b) $y''' + 2y'' = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
(c) $y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$.
(d) $y^{(iv)} + 4y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

8. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

(a) $y'' + 4y' - 21y = 3e^{2x}$
(b) $y'' + 6y' + 8y = 16x^2 - 14$
(c) $y'' + 9y = 2e^x + 9x - 18$
(d) $y'' - 4y' + 20y = 10e^{4x} - 5x + 1.$

9. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $y'' + 2y' + 5y = 15x + 16$ con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
(b) $y'' - 6y' + 10y = 5x - 18$ con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.
(c) $y'' + 4y' + 4y = 32e^{2x}$ con condizioni iniziali $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
(d) $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

10. Trovare un integrale particolare delle seguenti equazioni:

    (a) $y'' + 3y' = 2\sin x$.

    (b) $y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$.

    (c) $y'' + y = \sin x$.

    (d) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

    (e) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$.

11. Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni dell'equazione lineare

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

    con $b(x) \neq 0$. Definiamo $w(x) = y_1(x) + y_2(x)$ e $z(x) = 2y_1(x) - y_2(x)$. Dire se w e/o z sono anch'esse soluzioni dell'equazione.

12. In ciascuno dei casi seguenti, dire se l'insieme descritto è un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $y(x)$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

    (a) Le funzioni $y(x)$ tali che $y(1) = 0$.

    (b) Le funzioni $y(x)$ tali che $y(0) = 1$.

    (c) Le funzioni $y(x)$ periodiche di periodo 2π.

    (d) Le funzioni tali che $y(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

    (e) Le funzioni continue.

    (f) Le funzioni positive.

    (g) Le funzioni di segno costante.

    (h) I polinomi.

    (i) Le funzioni tali che $\frac{y(x)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

    (j) Le soluzioni dell'equazione $y'' + x^3y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$.

    (k) Le soluzioni dell'equazione $y' + xy^2 = 0$.

    (l) Le soluzioni dell'equazione $y'' + y = 1$.

Vedere anche ad es. i §4A, 5A, 5L del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte prima) e il §5.1 del libro di Salsa-Squellati.