UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 12.I.2018

1. Di ciascuna delle seguenti funzioni, calcolare l'integrale lungo la curva di equazione $\phi(t) = (t^4 + \cos\frac{\pi}{2}t) + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t$, per $t \in [0,1]$:

$$(a)\ \ f(z) = 4z^2, \qquad (b)\ \ f(z) = \frac{1}{z^2}, \qquad (c)\ \ f(z) = e^{\pi z}.$$

2. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla curva γ data dal bordo del rettangolo di vertici $-10, 10, 10+2i$ e $-10+2i$ (qui e nel seguito si sottintende che le curve chiuse semplici sono orientate positivamente).

$$(a)\ \ f(z) = \frac{1}{1+z^6}, \qquad (b)\ \ f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}, \qquad (c)\ \ f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}.$$

3. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulle curve γ_1 e γ_2, dove γ_1 è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 mentre γ_2 è la circonferenza di centro 0 e raggio 10

$$(a)\ \ f(z) = \frac{z^2+1}{e^z-1}, \qquad (b)\ \ f(z) = \frac{z}{e^z+1}, \qquad (c)\ \ f(z) = \frac{2z}{e^z+i}.$$

4. In ciascuno dei seguenti casi, trovare le singolarità isolate di f e calcolarne il residuo. Inoltre calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro 0 e raggio 5.

$$(a)\ \ f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1}, \qquad (b)\ \ f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2-\pi^2}.$$

5. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{1}{z^3-8}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z=-1$ e raggio R, percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R, quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R.

6. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{z^2}{e^{\pi z}-i}$, e si indichi con γ_R la circonferenza di centro l'origine e raggio R, percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale di f su γ_R quando $R=2$. Dire se esiste finito il limite dell'integrale per $R \to +\infty$.

7. Calcolare i seguenti integrali impropri reali, riconducendoli a opportuni integrali complessi e utilizzando il teorema dei residui.

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\,dx, \qquad \text{(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+1}\,dx.$$

8. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^4+4}$.

   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = -2$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4+4}\, dx$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse immaginario).

9. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

   (a) $2e^x + 3e^{-x}$, (b) $e^{2x} + 2e^{3x}$, (c) $x^2 e^{3x}$,

   (d) $x^2 e^{-x}$, (e) $e^x - \operatorname{sen} 2x$, (f) $(x+1)\cos x$.

10. Trovare le funzioni che hanno trasformata di Laplace le funzioni seguenti:

    (a) $\dfrac{2p+1}{p^2+4}$, (b) $\dfrac{2-3p}{p^2+1}$, (c) $\dfrac{2p-1}{p^2+2p+1}$

    (d) $\dfrac{p+1}{p^2-3p+2}$, (e) $\dfrac{2}{p^2+2p-3}$, (f) $\dfrac{p^2-3p+4}{p^3-2p^2+2p}$.

11. Risolvere, usando la trasformata di Laplace, i seguenti problemi di Cauchy.

    (a) $y' + y = 3x - 1$ con condizione iniziale $y(0) = 1$.

    (b) $y' + 2y = x + 2$ con condizione iniziale $y(0) = 0$.

    (c) $y'' + 3y' + 2y = e^x$ con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

    (d) $y'' + y = e^x$ con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

12. Nei due casi seguenti, calcolare la convoluzione delle funzioni f, g definite come segue per $x \geq 0$ (si sottintende che f, g sono nulle per $x < 0$).

    (a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = x$.

    (b) $f(x) = e^{\alpha x}$, $g(x) = e^{\beta x}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fissati.

Vedere anche, ad esempio, gli esercizi dei capitoli 18 e 19 del libro di Bertsch-Dal Passo-Giacomelli.