UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 13.XII.2017

1. Per ciascuna delle seguenti successioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che f_n converge puntualmente a una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ma che la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$. Descrivere sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ su cui invece la convergenza è uniforme.
   (a) $f_n(x) = \arctan nx$.
   (b) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$.
   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2+1}$.

2. Per ciascuna delle seguenti successioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostrare che f_n converge uniformemente a una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma che f' non è derivabile ovunque, oppure che f_n' non converge a f'.
   (a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$,
   (b) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$,
   (c) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$.

3. Per un fissato $\alpha > 0$, si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^4x^4}, \qquad x \in [0, \infty).$$
   (a) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge puntualmente in $[0, \infty)$.
   (b) Dire per quali α tra quelli trovati in (a) si ha
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx,$$
   dove f è il limite puntuale di f_n.
   (c) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge uniformemente in $[0, \infty)$.
   (d) Dire per quali $\alpha > 0$ la successione converge uniformemente in $[1, \infty)$.

4. Mostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x.$$

5. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le serie seguenti.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{n2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{2n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^{2n}}{n!}.$$

6. Trovare il raggio di convergenza delle serie seguenti

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{4n}\, n!}{n^n}\, x^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2n}\right)\right)^n x^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n^n}\, x^n$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 3^{3n}}{4^n + n^2}\, x^n \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, n^n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n x^n \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n\, x^n.$$

7. Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $[-\pi, \pi]$ a $\mathbb{R}$ e si consideri il prodotto scalare su X definito da $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$. Verificare che $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ sono ortogonali tra loro, mentre $h(x) = x^2$ è ortogonale a g ma non a f. Calcolare la norma di f, g, h. Trovare un polinomio $p(x)$ di secondo grado che sia ortogonale sia a f che a g.

8. Sia $f(x) = -1$ per $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = 1$ per $x \in [0, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$.

   (a) Si calcoli la serie di Fourier associata a f

   (b) Si dica quanto vale la somma della serie, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

   (c) Come applicazione del punto precedente, si dimostri che vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

   (d) Utilizzando l'identità di Parseval, si dimostri che vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9. Si considerino le funzioni f, g definite rispettivamente come $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodiche di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Per ciascuna delle due funzioni:

   (a) Si calcoli la serie di Fourier associata alla funzione.

   (b) Si dica quanto vale la somma della serie, per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

   (c) Si scriva l'identità di Parseval per la serie.

10. Sia $f(x) = x^2$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Si calcoli la serie di Fourier associata a f. Si dimostri che vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

11. Per ciascuna delle seguenti funzioni, trovare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni nell'intervallo $(0, \pi)$

$$(a) \quad f(x) = 1 \qquad (b) \; f(x) = 2x - \pi \qquad (c) \; f(x) = x(\pi - x).$$

12. Rappresentare mediante le serie di Fourier la funzione $u(x,t)$ che risolve l'equazione del calore

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad x \in [0,\pi],\, t \in [0,+\infty),$$

con condizioni nulle al bordo $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ per ogni $t \geq 0$, nei due casi seguenti: (i) condizione inziale $u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, 4x$, (ii) condizione iniziale $u(x,0) = x(\pi - x)$.

Vedere anche ad es. il cap. 6 del **primo** volume, parte seconda di Marcellini-Sbordone, i paragrafi 1C, 1D del secondo vol., parte prima di Marcellini-Sbordone, il cap. 7 del libro di Salsa-Squellati, e gli esercizi nella parte delle serie di Fourier del libro di Bertsch-Dal Passo-Giacomelli