UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 27.XI.2017

1. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 2uv), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Verificare che il punto $(1,-2,-4)$ appartiene a Σ e trovare l'equazione del piano tangente a Σ in tale punto.

   (b) Calcolare l'area della porzione di Σ corrispondente ai valori dei parametri (u,v) nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$.

2. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, 1 + \frac{u^2+v^2}{2}\right), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Verificare che il punto $(0,-2,3)$ appartiene a Σ e trovare l'equazione del piano tangente a Σ in tale punto.

   (b) Calcolare l'area della porzione di Σ corrispondente ai valori dei parametri (u,v) nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{3}$.

3. Dati $R > r > 0$, calcolare l'area della superficie Σ (toro), di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = (\,(R + r\cos u)\cos v\,,\ (R + r\cos u)\sin v\,,\ r\,\mathrm{sen}\,u\,) \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi].$$

4. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v) \qquad (u,v) \in [0,3] \times [0,\pi].$$

   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(0,2,\pi)$.

   (b) Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y,z) = x + y$ su Σ.

5. Si consideri la sfera $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\phi)$$

   dove $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\pi]$.

   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$.

   (b) Calcolare l'area di Σ.

   (c) Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y,z) = z$ sulla semisfera ottenuta intersecando Σ col semispazio $z \geq 0$.

   (d) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (0,0,z)$ attraverso la semisfera del punto precedente, orientata in modo che la normale punti verso l'esterno della sfera.

6. Si consideri la porzione di cono $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 2v)\,, \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1].$$

   (a) Calcolare l'area di Σ.

   (b) Calcolare l'integrale su Σ della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$.

   (c) Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

   attraverso Σ, secondo l'orientazione indotta della parametrizzazione.

7. Si consideri la porzione di cilindro $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$$

dove $u \in [0,2\pi]$, $v \in [-1,1]$

   (a) Calcolare l'area di Σ.

   (b) Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,dS$.

   (c) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (y, -x, z^2)$ attraverso Σ orientata in modo che la normale punti verso l'esterno del cilindro.

8. Si consideri la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{r}(u,v) = \big((3+v^2)\cos u\,,\ (3+v^2)\,\mathrm{sen}\, u\,,\ v+1 \big)\,, \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [-2,2].$$

   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $P = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$.

   (b) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = 2x\,\hat{\imath} + 2y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathrm{k}}$$

   prendendo come orientazione positiva quella data dalla parametrizzazione.

9. Sia Σ il grafico di una funzione $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e f di classe C^1. Mostrare che Σ si può rappresentare come una superficie parametrica regolare.

10. Sia $V_R \subset \mathbb{R}^3$ la sfera (piena) di raggio R centrata in $(0,0,0)$ e sia $\Sigma_R = \partial V_R$ la superficie sferica. Si definisca come normale positiva su Σ_R quella uscente da V_R. Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ attraverso Σ_R.

   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\,\hat{\imath} + (y^2+x^2)\,\hat{\jmath} + 2(x-z)y\,\hat{\mathrm{k}}$.

   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+\sin y)\,\hat{\imath} + (y+2)\,\hat{\jmath} + (xy+2)\,\hat{\mathrm{k}}$.

   (c) $\mathbf{F}(x,y,z) = xe^y\,\hat{\imath} + (2-e^y)\,\hat{\jmath} + (z^2-3z)\,\hat{\mathrm{k}}$.

   (Suggerimento: applicare il teorema della divergenza)

11. Sia V il cilindro (pieno) avente per asse l'asse z, con sezione circolare di raggio 2 e avente altezza 10 (contenuto nella striscia $z \in [0, 10]$). Si indichi con Σ la superficie laterale di V. Si scelga come normale positiva su Σ quella che punta verso l'esterno del cilindro. Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ attraverso Σ.

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 10x\ \hat{\imath} + (x^2 - 2yz)\ \hat{\jmath} + (z^2 - 10z)\ \hat{\mathrm{k}}$.
    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\ \hat{\imath} + x^2\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathrm{k}}$.
    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\ \hat{\imath} + (x - y)\ \hat{\jmath} + (z - 5)\ \hat{\mathrm{k}}$.

    (Suggerimento: Applicare il teorema della divergenza a $\mathbf{F}$ su V e sottrarre il contributo della faccia inferiore e superiore di ∂V, che non appartengono a Σ.)

12. Sia Σ la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 e sia Σ_0 la parte di Σ con $-1 \le z \le 1$. Per ciascuno dei casi seguenti, si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ e quello attraverso Σ_0 (prendendo come orientazione della normale quella uscente dalla sfera).

    (a) $\mathbf{F} = x(1 + 2y)\,\hat{\imath} + y^2\,\hat{\jmath} + (z^2 - z^3 - z)\,\hat{\mathrm{k}}$.
    (b) $\mathbf{F} = (2x + e^y)\,\hat{\imath} + \sin x\,\hat{\jmath} + (x^2y^2 + z)\,\hat{\mathrm{k}}$.

13. Sia Σ la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 e sia Σ_0 il quarto di Σ con $x \ge 0$, $y \ge 0$. Per ciascuno dei casi seguenti, si calcoli il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ e quello attraverso Σ_0 (prendendo come orientazione della normale quella uscente dalla sfera).

    (a) $\mathbf{F} = (x^2 - 2xy)\,\hat{\imath} + (1 + y^2)\,\hat{\jmath} + (e^x - z^2 + 2z)\,\hat{\mathrm{k}}$.
    (b) $\mathbf{F} = (x^2 + \sin z)\,\hat{\imath} + (y^2z - 2)\,\hat{\jmath} + (z^2 + z + 1)\,\hat{\mathrm{k}}$.

14. In ciascuno dei casi seguenti, calcolare il flusso del rotore del campo $\mathbf{F}$ attraverso la superficie Σ, con orientazione scelta a piacere. Effettuare il calcolo sia usando la definizione che usando il teorema di Stokes e verificare che i risultati ottenuti sono uguali.

    (a) Σ è il cilindro di equazione

    $$\mathbf{r}(u, v) = (\,2\cos u\,,\ 2\,\mathrm{sen}\,u\,,\ v\,)\,, \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

    e $\mathbf{F} = (1 + z)(y + x)\,\hat{\imath} + (1 + z)(y - x)\,\hat{\jmath} + x\,\hat{\mathrm{k}}$.

    (b) Σ è la metà della superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1 che si trova nel semispazio $z \ge 0$ e $\mathbf{F} = xy\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + yz\hat{\mathrm{k}}$.

    (c) Σ il tronco di cono di equazione

    $$\mathbf{r}(u, v) = (\,(2 - v)\cos u\,,\ (2 - v)\,\mathrm{sen}\,u\,,\ v\,)\,, \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

    e $\mathbf{F} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + xyz\hat{\mathrm{k}}$.

15. Data una funzione f e un campo vettoriale $\mathbf{F}$, mostrare che

    (a) $\nabla(f^2) = 2f\nabla f$
    (b) $\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle + f\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}$
    (c) $\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$.

16. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme limitato che soddisfa le ipotesi del teorema di Gauss-Green

   (a) Mostrare che, se $f \in C^2(\Omega)$ si annulla su tutti i punti di $\partial\Omega$, allora
$$\iiint_\Omega f \Delta f \, dx\, dy\, dz = -\iiint_\Omega |\nabla f|^2 \, dx\, dy\, dz$$

   (b) Mostrare che, se $f \in C^2(\Omega)$ è armonica ed è nulla su $\partial\Omega$, allora f è nulla su tutto Ω.

   (c) Mostrare che, se due funzioni $f_1, f_2 \in C^2(\Omega)$ sono entrambe soluzioni del seguente problema (equazione di Poisson con condizioni al bordo di Dirichlet)
$$\begin{cases} \Delta f(x,y,z) = \phi(x,y,z) & \forall (x,y,z) \in \Omega \\ f(x,y,z) = \psi(x,y,z) & \forall (x,y,z) \in \partial\Omega, \end{cases}$$
   dove $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate, allora necessariamente $f_1 \equiv f_2$ in Ω.

17. Sia
$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

   (a) Dire se il campo ∇f è irrotazionale e/o solenoidale.

   (b) Dire se la funzione f è armonica.

   (c) Calcolare il flusso di ∇f attraverso la superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 1.

   (d) Dire se esiste un campo $\mathbf{G}$ definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \nabla f$.

   (e) Dire quanto vale il flusso di ∇f uscente dalla superficie sferica di centro $(2,0,0)$ e raggio 1.

   (f) Dire quanto vale il flusso di ∇f uscente dalla superficie sferica di centro $(2,0,0)$ e raggio 10.

   (g) Sia $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ una qualunque curva chiusa non passante per l'origine. Dire quanto vale la circuitazione di ∇f su γ.

Vedere anche ad es. i §5D, 5E, 6D del libro di Marcellini-Sbordone (vol.2 parte seconda) e i §3.1, 4.3 del libro di Salsa-Squellati.