UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 17.XI.2017

1. Verificare che le curve definite dalle seguenti parametrizzazioni sono regolari, o regolari a tratti; nel secondo caso, dire quali sono i punti della curva in cui non è assicurata l'esistenza della retta tangente.

   (a) $\gamma(t) = (\, R\cos t\, ,\ R \operatorname{sen} t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (circonferenza di raggio R).

   (b) $\gamma(t) = (\, \cos^3 t\, ,\ \operatorname{sen}^3 t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (asteroide).

   (c) $\gamma(t) = (\, e^t \cos t\, ,\ e^t \operatorname{sen} t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (spirale logaritmica).

   (d) $\gamma(t) = (\, t^3\, ,\ t^2\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [-1, 1]$.

   (e) $\gamma(t) = (\, \cos t\, ,\ \operatorname{sen} t, t\,) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 2\pi]$ (porzione di elica cilindrica).

2. Calcolare la lunghezza di ciascuna delle curve dell'esercizio precedente.

3. Per ciascuno dei casi seguenti, si determini quali tra i punti P_1, P_2, P_3 appartengono alla curva $\gamma(t)$; inoltre, per i punti che appartengono, si determini l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente a γ.

   (a) $\gamma(t) = (-2 + 2\cos t, 2\operatorname{sen} t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (2,0),\ P_3 = (-2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   (b) $\gamma(t) = (2\cos t, -1 + 4\operatorname{sen} t),\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (\sqrt{3}, 1),\ P_3 = (-2, -1)$.

   (c) $\gamma(t) = (2t^2 - 2, t - 1),\ t \in [-2, 2]$, $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (3,1),\ P_3 = (0,-2)$.

4. Sia γ la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Mostrare che la curva passa due volte per l'origine con tangenti diverse, e trovare le equazioni delle due rette tangenti.

5. Calcolare i seguenti integrali curvilinei

   (a) $\int_\gamma (x^2 y + y^3)\, ds$, dove $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t),\ t \in [0, \pi]$.

   (b) $\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds$, dove $\gamma(t) = (e^t \cos 3t, e^t \operatorname{sen} 3t),\ t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $\int_\gamma xy\, ds$, dove $\gamma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t),\ t \in [0, \pi/2]$.

   (d) $\int_\gamma y(x - 2y^4)\, ds$, dove $\gamma(t) = (t^4, t),\ t \in [0, 2]$.

   (e) $\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, dove $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t),\ t \in [-\pi, \pi]$.

   (f) $\int_\gamma \sqrt{1 - y}\, ds$, dove $\gamma(t) = (t + \operatorname{sen} t, \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$.

   (g) $\int_\gamma (xy - 2y + z^2)\, ds$, dove $\gamma(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 2t),\ t \in [0, 2\pi]$.

   (h) $\int_\gamma (\frac{2}{3}x + 4z)\, ds$, dove $\gamma(t) = (3t, \frac{3}{2}t^2, t^3),\ t \in [0, 1]$.

   (i) $\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds$, dove $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t),\ t \in [0, 1]$.

6. Sia $\mathbf{v} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 tale che $||\mathbf{v}(t)||$ è costante. Mostrare che $\mathbf{v}'(t)$ è perpendicolare a $\mathbf{v}(t)$ per ogni t (suggerimento: derivare rispetto a t l'uguaglianza $||\mathbf{v}(t)||^2 = c$).

7. Si consideri una curva della forma $\gamma(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\,\mathrm{sen}\, t)$, dove $\rho(t)$ è una funzione di classe C^1 e positiva. Mostrare che γ è una curva regolare.

8. Mostrare che la lunghezza di un'ellisse di semiassi a, b è compresa tra $2\pi a$ e $2\pi b$.

9. Verificare che le tre parametrizzazioni seguenti sono parametrizzazioni equivalenti dello stesso arco di curva (porzione di ellisse). Calcolare il vettore velocità alla curva nel punto $(\sqrt{3}, 2)$ per ciascuna delle parametrizzazioni e verificare che i tre vettori ottenuti sono paralleli.

   (a) $\gamma(t) = (\,2\cos t\,,\ 4\,\mathrm{sen}\, t\,), \quad t \in [-\pi/4, \pi/4]$;

   (b) $\gamma(t) = (\,2\cos(t/4)\,,\ -4\,\mathrm{sen}\,(t/4)\,), \quad t \in [-\pi, \pi]$;

   (c) $\gamma(t) = (\,\frac{1}{2}\sqrt{16 - t^2}\,,\ t\,), \quad t \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

10. Per ciascuno dei casi seguenti, si calcoli l'integrale del campo $\mathbf{F}$ sulla curva γ assegnata, e quello su $\tilde{\gamma}$, dove $\tilde{\gamma}$ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

    (a) $\gamma(t) = (t, t^2)$ per $t \in [0, 2]$, campo $\mathbf{F}(x, y) = (\,y\,,\ 2x + 1\,)$.

    (b) $\gamma(t) = (t^3, t)$ per $t \in [-1, 1]$, campo $\mathbf{F}(x, y) = (\,x + 2y\,,\ -x\,)$.

    (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y\,,\ x\,,\ z^2)$.

    Alla luce dei risultati ottenuti, dire se i campi vettoriali considerati sono conservativi.

11. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

    (a) $\mathbf{F}(x, y) = (\,2x\sin y\,,\ x^2\cos y\,)$.

    (b) $\mathbf{F}(x, y) = (\,3x^2y\,,\ 2xy\,)$.

    (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\,e^{-y}\,,\ -xe^{-y} + 2y\,)$.

    (d) $\mathbf{F}(x, y) = (\,y\sin y\,,\ x\cos x\,)$.

    (e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\,2xy + z\,,\ x^2 + z + 1\,,\ x + yz\,)$.

    (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\,\sin(x - y)\,,\ -\sin(x - y) - 2yz\,,\ -y^2 + 3\,)$.

12. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Nei casi in cui $\mathbf{F}$ è conservativo, calcolarne un potenziale e calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione

$$\gamma(t) = (\,t + \sin t \ln(2 - t)\,,\ (t - 1)^2 \ln(2 - \cos t)\,), \qquad t \in [0, 1].$$

    (a) $\mathbf{F}(x, y) = (\,a\cos(y^2)\,,\ xy\sin(y^2)\,)$.

    (b) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{axy}{1 + x^4}\,,\ \mathrm{arctg}(x^2)\right)$.

    (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\,3xe^y\,,\ a(2xy + y^2)\,)$.

    (d) $\mathbf{F}(x, y) = (\,2x(e^{2x^2+y} + e^{y^2})\,,\ a(e^{2x^2+y} + 4x^2ye^{y^2})\,)$.

13. Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare l'integrale del campo $\mathbf{F}$ sulla curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = (\, t^2 - 1\,,\ t + 1\,), \qquad t \in [0, 1].$$

(Suggerimento: i campi non sono conservativi, ma possono essere scritti come somma di un campo conservativo più uno il cui integrale è semplice da calcolare)

(a) $\mathbf{F}(x, y) = (\, 2xye^{x^2y} + y\,,\, x^2e^{x^2y} + 2x + y\,).$

(b) $\mathbf{F}(x, y) = (\, 2x\cos[\pi(x^2 - y^2)]\,,\, -2y\cos[\pi(x^2 - y^2)] + x^2\,).$

14. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (\, e^{2x}\sin(4\pi y) + y^2\,,\, 2\pi e^{2x}\cos(4\pi y) + ay(x + 1)\,)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro (costante).

(a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^3 - 2t, (1 - t)e^{t^2})$, $t \in [0, 1]$.

(c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

15. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = \left(ye^{2xy} - y\ ,\ e^{2y} + xe^{2xy} + ax \right)$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^3 - 5t, te^{t^2 - 4})$, $t \in [0, 2]$.

(c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

16. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, 1 + \sqrt{2}\cos t\,,\, \sin t\,), \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

(a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse y e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.

(b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (xy - y)\, ds$.

(c) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (\, xy^4 + ye^x\,,\, 2y^3(x^2 + 2) + e^x\,)$.

17. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, 2t\,,\, t^3\,), \qquad t \in [0, 1]\,.$$

(a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 2 e $\sqrt{13}$.

(b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (4y - x^3)\, ds$.

(c) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (\, 4xe^{x^2 - 3y}\,,\, 10y^9 - 6e^{x^2 - 3y}\,)$.

18. Dire se i seguenti campi vettoriali sono conservativi.

$$(a)\ \mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \, , \, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \qquad (b)\ \mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \, , \, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

19. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(ye^{2xy} - \frac{ay}{x^2+y^2} \, , \, e^{2y} + xe^{2xy} + \frac{ax}{x^2+y^2} \right),$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^3 - 2t, (1-t)e^{t^2})$, $t \in [0,1]$.

(c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\zeta(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

20. Calcolare (usando il teorema di Stokes) gli integrali seguenti sulla curva γ, dove γ è il bordo dell'insieme Ω orientato positivamente.

(a) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (2x^2 - 2y + 2, -3x^2)$ e $\gamma = \partial\Omega$ dove Ω è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-2,1)$ e $(-2,4)$.

(b) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (2xy, e^y + y - 3x^2)$ e $\gamma = \partial\Omega$ dove Ω è il semicerchio di centro $(2,3)$ e raggio 2 che sta sotto la retta $y = 3$.

(c) $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (\cos x - 2y, e^y - 3x^2)$ e $\gamma = \partial\Omega$, dove Ω è il quarto di corona circolare di centro $(0,0)$, raggio da 2 a 3, contenuto nel quadrante $x \le 0$, $y \ge 0$.

21. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y - x \operatorname{sen}[\pi(x^2 - 2y)] \, , \, \operatorname{sen}[\pi(x^2-2y)] + \alpha x \right),$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di F.

(b) Per un valore di α qualunque, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^{14} + t^6 - t^2 \, , \, -t^2 \,)$, $t \in [0,1]$.

(c) Mostrare che, per i valori di α diversi da quelli trovati nel punto (a), non esistono curve chiuse semplici su cui il campo ha integrale nullo (sugg. usare il teorema di Stokes nel piano).

22. Sia $\mathbf{F}$ un campo irrotazionale definito su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mostrare (usando il teorema di Stokes) che la circuitazione di $\mathbf{F}$ su una circonferenza di raggio R centrata in $(0,0)$ (percorsa in senso antiorario) è la stessa qualunque sia R. Mostrare che il risultato dell'integrale resta invariato se invece di una circonferenza si considera una qualunque curva chiusa semplice che gira intorno all'origine in senso antiorario.

23. Trovare un esempio di un campo $\mathbf{F}$ e di una curva chiusa γ tale che $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = 0$, ma $\mathbf{F}$ non è irrotazionale.

24. Dire se le seguenti proprietà sono vere o false. Motivare le risposte, riferendosi a risultati visti nel corso, o trovando controesempi.

   (a) L'integrale curvilineo di un campo vettoriale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$ cambia segno se si sostituisce la parametrizzazione di γ con una di verso opposto.

   (b) La lunghezza di una curva γ cambia segno se si sostitutisce la parametrizzazione di γ con una di verso opposto.

   (c) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione positiva, allora il suo integrale curvilineo $\int_\gamma f\, ds$ è positivo per qualunque curva γ in $\mathbb{R}^n$.

   (d) Un campo vettoriale $\mathbf{F}$ conservativo è anche irrotazionale, qualunque sia il suo insieme di definizione.

   (e) Un campo vettoriale $\mathbf{F}$ irrotazionale è anche conservativo, qualunque sia il suo insieme di definizione.

   (f) L'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$ di un campo conservativo $\mathbf{F}$ su una curva regolare γ non cambia se si sostituisce γ con un'altra curva avente gli stessi estremi.

   (g) Se un campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale allora necessariamente $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = 0$ per ogni curva chiusa γ.

   (h) Se un campo $\mathbf{F}$ non è conservativo e γ è una curva chiusa, allora necessariamente $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} \neq 0$.

   (i) Se un campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale allora è possibile trovare due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi tali che $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} \neq \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$.

   (j) Se un campo vettoriale è definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ allora non può essere conservativo.

   (k) Se un campo vettoriale $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ e soddisfa $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ allora l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$ è nullo per ogni curva chiusa γ.