UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 5.XI.2017

1. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y)$ sul rettangolo R, dove

   (a) $f(x,y) = y^2 \sin 2x + xe^{-3y}, \qquad R = [0,\pi/2] \times [0,1]$

   (b) $f(x,y) = x^3y + x^2 + e^xy^3, \quad R = [0,1] \times [-1,1]$

   (c) $f(x,y) = e^{2y-x}, \quad R = [-1,0] \times [0,2]$

   (d) $f(x,y) = y^2e^{xy}, \quad R = [0,2] \times [-1,1]$

   (e) $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}, \quad R = [1,3] \times [0,2]$.

2. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y)$ su Ω nei casi seguenti

   (a) $f(x,y) = 1 - xy$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.

   (b) $f(x,y) = 2x - 3y$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0,-1)$, $(0,2)$ e $(3,0)$.

   (c) $f(x,y) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(x+y)$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(-1,-2)$, $(-1,1)$ e $(0,0)$.

   (d) $f(x,y) = 1 + x$, $\Omega =$ triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(4,2)$.

   (e) $f(x,y) = x - y$, $\Omega =$ trapezio di vertici $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ e $(3,0)$.

   (f) $f(x,y) = y + x^2$, $\Omega =$ trapezio di vertici $(-1,-1)$, $(-1,2)$, $(0,3)$, $(0,-2)$.

   (g) $f(x,y) = x + y$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0\}$.

   (h) $f(x,y) = 2x + 3xy$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in [1,4], 0 \le y \le 1/x\}$.

   (i) $f(x,y) = x - y$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in [-1,2], 0 \le y \le 1 + x^2\}$.

   (j) $f(x,y) = |x - y|$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in [0,1], x^2 \le y \le 1\}$.

   (k) $f(x,y) = \frac{x^2}{(y+1)^2}$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 \le y \le 2x + 3\}$.

   (l) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 + 3 \le y \le 4x\}$.

3. Calcolare il baricentro dei seguenti insiemi:

   (a) $\Omega = \{(x,y) \ : \ x^2 - x \le y \le 0\}$.

   (b) $\Omega = \{(x,y) \ : \ 2y^2 \le x \le y^2 + 4\}$.

   (c) $\Omega = \{(x,y) \ : \ x \ge 0, \ y \ge 2/x, \ x^2 + y^2 \le 5\}$.

   (d) $\Omega = \{(x,y) \ : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ y \ge 0\}$.

4. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ insiemi misurabili senza punti interni in comune. Supponiamo di sapere che hanno area uguale rispettivamente a 2 e a 5 e baricentro rispettivamente in $(0,0)$ e $(1,3)$ (considerando la densità uguale a 1). Possiamo dire qual'è il baricentro di $\Omega_1 \cup \Omega_2$?

5. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y)$ su Ω nei casi seguenti

   (a) $f(x,y) = 2x + 2y$, $\Omega =$semicerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

   (b) $f(x,y) = x^2 - x$, $\Omega =$semicerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 contenuto nel semipiano $x \leq 0$.

   (c) $f(x,y) = 1 - xy$, $\Omega =$quarto di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 3 contenuto nel quadrante $x \leq 0$, $y \leq 0$.

   (d) $f(x,y) = y+x$, $\Omega =$settore del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2, contenuto nel semipiano delle $y \geq 0$ e delimitato dalle rette di equazione $y = -x$ e $y = \sqrt{3}x$.

   (e) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + y$, $\Omega =$corona circolare di raggi 2 e 3 e centro $(0,0)$.

   (f) $f(x,y) = x + y$, $\Omega =$cerchio di raggio 1 e centro $(1,1)$.

   (g) $f(x,y) = x - y$, $\Omega =$cerchio di raggio 1 e centro (x_0, y_0) per un generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

6. Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x,y)$ su Ω nei casi seguenti

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\Omega =$porzione del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 che si trova sopra la retta $y = 1$.

   (b) $f(x,y) = (x+y)^2$, $\Omega =$porzione del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 che si trova sopra la retta $x + y = 1$.

   (c) $f(x,y) = (x+y)^2$, $\Omega =$porzione del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 2 che si trova sopra l'asse x.

   (d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $\Omega =$porzione del cerchio di centro $(-2,0)$ e raggio 2 che si trova sotto la retta $x + \sqrt{3}y = 0$.

   (e) $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega =$ la parte del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ esterna al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1.

   (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\Omega =$ il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1.

7. Sia Ω il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

   (a) Trovare il baricentro di Ω.

   (b) Calcolare l'integrale su Ω di $f(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)$.

8. Rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente, con Ω la piramide di vertici $(-2,0,0)$, $(0,-2,0)$, $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$.

9. Descrivere per mezzo di disequazioni nelle variabili x, y, z l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in ciascuno dei casi seguenti

   (a) Ω è la sfera (piena) di centro $(0,0,0)$ e raggio R.

   (b) Ω è la metà superiore della sfera del punto precedente.

   (c) Ω è il cilindro che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e altezza h (NB si sottintende un cilindro "retto", cioè con asse perpendicolare alla base).

   (d) Ω è il cono che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = 0$ e per vertice il punto $(0,0,h)$, con $h > 0$.

   (e) Ω è il cono "rovesciato" che ha per base il cerchio di centro l'origine e raggio R nel piano $z = h$, con $h > 0$, e per vertice l'origine.

10. Per gli insiemi (b),(c) ed (e) dell'esercizio precedente, si risponda ai seguenti quesiti

    (i) Scrivere l'insieme come insieme normale rispetto all'asse z

    (ii) Descrivere l'insieme $\Omega_z := \{(x,y) \ : \ (x,y,z) \in \Omega\}$ al variare di z.

    (iii) Descrivere l'insieme Ω in coordinate cilindriche.

    (iv) Calcolare il volume dell'insieme.

    (v) Calcolare il baricentro dell'insieme (considerando la densità unitaria).

    (vi) Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z dell'insieme.

    NB Ricordiamo che il momento di inerzia rispetto all'asse z di un insieme Ω di densità assegnata $\delta(x,y,z)$ è l'integrale

    $$\int\int\int_{\Omega} (x^2 + y^2)\, \delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

    Se la densità non è specificata, si sottintende $\delta \equiv 1$.

11. Sia B la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1. Per ciascuno dei casi seguenti, descrivere in coordinate sferiche l'insieme B^* definito da

    (i) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $x \leq 0$.

    (ii) B^* è la semisfera ottenuta intesecando B col semispazio $z \leq 0$.

    (iii) B^* è il quarto della sfera B con $x \geq 0$, $y \leq 0$.

    (iv) B^* è il quarto della sfera B con $x \leq 0$, $z \geq 0$.

    (v) B^* è l'ottavo della sfera B con $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$.

12. Sia Ω un cilindro omogeneo (cioè con densità costante) di base circolare di raggio 5. La massa di Ω è nota e vale 4. Calcolare il momento d'inerzia di Ω rispetto al suo asse.

13. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è la parte della sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ compresa tra i piani di equazione $z = -1$ e $z = 0$ e avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2$.

14. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di Ω, dove

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x^2 + y^2 \geq z^2, \ z \geq 0\}.$$

15. Calcolare la massa di Ω, dove Ω è l'ottavo di sfera $\{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ avente densità $\delta(x, y, z) = 1 + x + y$.

16. Calcolare l'integrale di $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \ x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

17. Sia $ax + by + cz = A$ l'equazione di un piano $P \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme tale che $ax + by + cz > A$ su tutti i punti di Ω (cioè Ω è interamente contenuto in uno dei due semispazi individuati dal piano P). Mostrare che, qualunque sia la densità di Ω, il baricentro $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di Ω soddisfa anch'esso $a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} > A$ (cioè appartiene sicuramente allo stesso semispazio in cui è contenuto Ω).

18. Sia Ω la sfera di centro l'origine e raggio 1 e sia Ω_0 la metà di Ω che giace nel semispazio $z \geq 0$. Senza fare calcoli, dire quali tra le funzioni seguenti hanno integrale nullo su Ω_0 per simmetria. Negli altri casi dire il segno dell'integrale:

(i) $f(x, y, z) = 1$, (ii) $f(x, y, z) = x$, (iii) $f(x, y, z) = z$,
(iv) $f(x, y, z) = y^2$, (v) $f(x, y, z) = xz$, (vi) $f(x, y, z) = x^2 z$,
(vii) $f(x, y, z) = \sin x$, (viii) $f(x, y, z) = yze^x$, (ix) $f(x, y, z) = \cos xy$,
(x) $f(x, y, z) = \sin(x + y)$ (xi) $f(x, y, z) = x^3 + z^3 - z$ (xii) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$.

Per altri esercizi, vedere ad es. i §3A, 3B, 3E e gli esercizi 5.51-5.52 del libro di Marcellini-Sbordone, (vol.2 parte seconda) e i §4.1, 4.2, 4.4 del libro di Salsa-Squellati.