UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 12.X.2017

1. Per ciascuno dei casi seguenti, si denoti con Γ l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data e si dica quali tra i punti P_1, P_2, P_3 appartengono a Γ. Per i punti che appartengono, si dica se sono regolari (cioè se il teorema di Dini garantisce la locale esplicitabilità rispetto a una delle due variabili) e in caso affermativo si calcoli l'equazione cartesiana della retta tangente a Γ nel punto.
   (a) $x^4 - 3x^2 - y^2 - 2yx + 1 = 0$; $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (0, 1)$.
   (b) $e^x(y^2 - x - 2) = 0$; $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (2, 2)$.
   (c) $x^2 + e^{xy} - (x - y)^2 = 1$; $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$.
   (d) $2x^5 + 3xy^2 = 14$; $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (1, -2)$.

2. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se l'insieme Γ dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione data è una curva regolare e, in caso contrario, determinare i punti non regolari di Γ :
   (a) $x^4 - y^2 = 1$;
   (b) $x^4 - y^2 = 0$;
   (c) $x^2 - 4x + 4y^2 = 0$;
   (d) $y^4 + x^2 + 4x = 4$.

3. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ sulla curva assegnata.
   (a) $f(x, y) = y - x^2$ sulla curva di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3$ sulla curva di equazione $x^4 + y^4 = 1$.
   (c) $f(x, y) = y^2 - 3x$ sulla curva di equazione $x^2 + 9y^2 = 1$.
   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 8y$ sulla curva di equazione $x^2 + 4x + y^2 = 1$.
   (e) $f(x, y) = (x - 1)^2 - 6y$ sulla curva di equazione $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

4. Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso e non limitato e sia $f(x, y) = x^2 + y^2$. Mostrare che f non possiede massimo su C ma possiede minimo. (Sugg. osservare che f è il quadrato della distanza dall'origine. Per provare l'esistenza del minimo, considerare il compatto ottenuto intersecando C con un cerchio chiuso abbastanza grande, e mostrare che il minimo di f sul compatto è minimo anche su C)

5. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$ e sia $\Gamma = \{(x, y) \ : \ y = x^2 - x - 1\}$. Mostrare che $\sup_\Gamma f = +\infty$, mentre f assume minimo assoluto su Γ, e calcolare quest'ultimo.

6. Per ciascuno dei casi seguenti, determinare il massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme Ω.

   (a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

   (c) $f(x,y) = x - 2y$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

   (d) $f(x,y) = x - x^2 - y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq 9\}$.

   (e) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. Sia $f(x,y) = x(x+3) + y^2 - 4(y+1)$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 1\}$.

8. Sia $f(x,y) = y^2 - x$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 - 4x + 2y^2 = 0$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 - 4x \leq 0,\ x \geq 2\}$.

9. Nei seguenti casi, trovare il massimo e minimo assoluto della funzione f sull'insieme C.

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + y - 3$, $\quad C = \{(x,y) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ y \geq -1\}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $\quad C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 1\}$.

   (c) $f(x,y) = xy$, $\quad C = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq 1\}$.

   (d) $f(x,y) = x^2 - 8x + 3y^2$, $\quad C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9,\ y \leq -x\}$.

   (e) $f(x,y) = y$, $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -x\}$.

   (f) $f(x,y) = x + y$, $C = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 16, y \geq 1\}$.

   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y$, $C = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 3\}$.

   (h) $f(x,y) = 3x + 4y$, $C = \{(x,y) : x + y \leq 4, xy \geq 1, x \geq 0\}$.

10. (a) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ sull'insieme degli $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

    (b) Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sulla sfera (piena) di centro $(-1,0,0)$ e raggio 2.

11. (a) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = y + z$ sull'insieme degli $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e $z = x^2 + y^2$.

    (b) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = z$ sull'insieme degli $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano i vincoli $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$.

Vedere anche i §1D, 1E del libro di Marcellini-Sbordone, e il §2.3 del libro di Salsa-Squellati