

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi — 6.X.2017

- In ciascuno dei seguenti casi, dire se l'insieme Ω è aperto, chiuso o né l'una né l'altra cosa, e determinare la sua frontiera $\partial\Omega$, la sua parte interna $\overset{\circ}{\Omega}$ e la sua chiusura $\overline{\Omega}$.
 - $\Omega = (0, 1) \cup (2, +\infty)$
 - $\Omega = [0, 1)$
 - $\Omega = [0, 1] \cup \{2\} \cup [3, \infty)$
 - $\Omega = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
 - $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 < y \leq 1\}$
 - $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (1, 3], y = 0\}$
 - $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{ razionali}\}$
 - $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$
- Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \notin \Omega$. Mostrare che $x_0 \in \partial\Omega$ se e solo se x_0 è di accumulazione per Ω .
- Dimostrare il seguente enunciato (analogo a più dimensioni del *Teorema di Rolle*). Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$, che assume un valore costante su tutti i punti di ∂D . Allora esiste $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$.
- Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, con interno non vuoto, e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su D e derivabile su $\overset{\circ}{D}$. Supponiamo che $f > 0$ su $\overset{\circ}{D}$, che $f \equiv 0$ su ∂D e che esista un unico punto $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ critico per f . Mostrare che x_0 è un punto di massimo locale per f .
- Sia $f(x, y) = \sin(2x^2 - x - y) + \frac{x}{(y+1)^2}$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, f(1, 1))$ e la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ nella direzione di $\mathbf{v} = (1, 2)$.
- Sia $f(x, y, z) = xyz^2 + \frac{e^{x+y}}{z}$. Determinare l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(2, -2, 1, f(2, -2, 1))$ e la derivata direzionale di f nel punto $(2, -2, 1)$ nella direzione di $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$. (Nell'equazione dell'iperpiano tangente, si può usare la lettera w per denotare la quarta variabile).

7. Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare i punti critici e studiarne la natura; dire cioè se sono punti di massimo relativo, o di minimo relativo, o nessuna delle due cose.

- (a) $f(x, y) = x^2 e^y - y^2 + y$
- (b) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$
- (c) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - 2xy^3$
- (d) $f(x, y) = \exp(1 - x^2 + y^2)$
- (e) $f(x, y) = xy(1 + x + y)$
- (f) $f(x, y) = \exp(4x - x^2 - 4y^2 - 3)$
- (g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - e^4 x^2$
- (h) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$
- (i) $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x.$
- (j) $f(x, y, z) = z^2 - x^2 + 2xy - \sqrt{2}y^2 z.$

8. Mostrare che, se $n > 2$, allora una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ può avere in un punto gradiente nullo e matrice hessiana con determinante e traccia positivi senza che il punto sia di minimo.

9. Sia $f(x, y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$. Mostrare che, presa qualunque retta passante per $(0, 0)$, la restrizione di f su quella retta ha un minimo locale in $(0, 0)$ (cioè, per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $t \rightarrow f(at, bt)$ ha un minimo locale per $t = 0$). Mostrare che $(0, 0)$ non è di minimo locale per f .

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Mostrare che se, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $t \rightarrow f(x_0 + at, y_0 + bt)$ ha un minimo globale per $t = 0$, allora f ha un minimo globale in (x_0, y_0) . Vale la stessa implicazione sostituendo “locale” a “globale”?

11. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se l'origine $(0, 0)$ è un punto di massimo, o di minimo o nessuno dei due. Nel caso di massimo o minimo, determinare se è relativo o assoluto, stretto o non stretto.

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x, y) = x^2(\cos y - 1)$ | (b) $f(x, y) = (1 + x^3)(1 - y^2)$ |
| (c) $f(x, y) = \sin^2 x + \sin^3 y$ | (d) $f(x, y) = \sin(x^2 y^2)$ |
| (e) $f(x, y) = (1 + x^2 y^4)^{-1}$ | (f) $f(x, y) = \ln(2 + x^2 + y^3)$ |
| (g) $f(x, y) = x^2 y^3$ | (h) $f(x, y) = (x^2 y^2 - 1)^2$ |
| (i) $f(x, y) = e^{x^2} + y^4 + 1$ | (l) $f(x, y) = \cos(xy) - \sin^2(x + y)$ |
| (m) $f(x, y) = (x + y)^5$ | (n) $f(x, y) = (x - y)^4 - 1$ |
| (o) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + x^3$ | (p) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy^3$ |
| (q) $f(x, y) = x^4(y^3 - 1) + 1$ | (r) $f(x, y) = y(y - x^2).$ |

12. Nei casi seguenti, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

(a) $f(x, y) = x^2 - 1 + 2(4 - x)y^4$

(b) $f(x, y) = x^4 - y^4 - x^3 + xy^2 + 1$

(c) $f(x, y) = (x^4 - y^2)(y - 3)$

(d) $f(x, y) = x^4(1 - 2y) + 2y^2 - 1.$

13. Nei casi seguenti, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, trovare i punti critici di f e determinarne la natura.

(a) $f(x, y) = (x + y - 1)^2 + ax^4$

(b) $f(x, y) = (y - x^2)(y - a)$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x - a)$

14. (a) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $(2/3, -4/3)$ è di massimo o minimo per la funzione $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2\lambda xy + y^2$.

(b) Dire quali tra i punti $P_1 = (-\sqrt{2}, 2), P_2 = (2, 0), P_3 = (0, 4)$, è di massimo/minimo per la funzione $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2y + 1$.

(c) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nell'origine

$$f(x, y) = e^{x^2 - 2y^2}, \quad g(x, y) = x(x - 1) - 4xy + 5y^2, \quad h(x, y) = (x^3 - 1)y^2.$$

(d) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0, 1)$

$$f(x, y) = \ln(2y + 2x^2 - y^2), \quad g(x, y) = x^2 - 2y^2 + y^3$$

$$h(x, y) = \cos(x^2) - \sin((y - 1)^2) + 1.$$

15. Date una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e una $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si ponga $g(x, y) = \phi(f(x, y))$.

(a) Mostrare che, se ϕ è monotona, allora c'è una relazione tra i punti di estremo locale di f e quelli di g .

(b) Supponiamo che f, ϕ siano di classe C^1 . Mostrare che, in generale, i punti critici di f sono critici anche per g ma che non vale sempre il viceversa. Mostrare che f, g hanno gli stessi punti critici se in più si suppone che ϕ' non si annulli mai.

16. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostrare che $f(x, y)$ possiede le derivate parziali in tutti i punti (compreso $(0, 0)$), ma che non è continua in $(0, 0)$. Verificare che le derivate parziali di f non sono continue in $(0, 0)$.

(NB questo esercizio e il successivo servono a richiamare le implicazioni tra continuità, derivabilità e differenziabilità, argomenti che si suppongono trattati in dettaglio nel corso di Analisi I)

17. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostrare che $f(x, y)$ possiede tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ e che valgono tutte zero. Mostrare che f non è continua in $(0, 0)$.

18. Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x, y)$. Mostrare che f è una funzione convessa (suggerimento: ricordarsi della disuguaglianza triangolare soddisfatta dalla funzione modulo).

Altri esercizi si possono trovare ad es. nei §3D, 3E, 3G, 3H (2° volume, parte prima) e nei §1A, 1B, 1C (2° volume, parte seconda) del libro di Marcellini-Sbordone, e nei §2.2 e 2.3 del libro di Salsa-Squellati.