

# UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

## Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 18.I.2023

- Le curve hanno tutte parametrizzazioni di classe  $C^\infty$ . Per studiare la regolarità calcoliamo  $\gamma'(t)$  e verifichiamo se si può annullare.
  - $\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ , non nullo per ogni  $t$ , curva regolare.
  - $\gamma'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$ , si annulla per  $t = 0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi, 2\pi$ , i punti  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$  non sono regolari.
  - $\gamma'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$ , non nullo per ogni  $t$ , curva regolare.  
(Nota: piuttosto che studiare l'annullamento simultaneo di  $x'(t)$  e  $y'(t)$ , può convenire in questo caso calcolare  $\|\gamma'(t)\|$ ; si trova che  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$  e quindi  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t$ .)
  - $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ , si annulla per  $t = 0$ , l'origine è un punto non regolare.
  - $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ , non nullo per ogni  $t$ , curva regolare.

2. (a)  $L(\gamma) = 2\pi R$       (b)  $L(\gamma) = 6$       (c)  $L(\gamma) = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$       (d)  $L(\gamma) = \frac{2}{27} \left( 13^{\frac{3}{2}} - 8 \right)$

(e)  $L(\gamma) = 2\sqrt{2}\pi$ .

NB Sottolineiamo un errore frequente nel caso (b). Per tale curva si trova

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t}.$$

Se si semplifica erroneamente  $\sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t} = 3 \sin t \cos t$ , si trova

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 3 \sin t \cos t \, dt = 0,$$

conclusione evidentemente sbagliata, perché una curva (non costante) non può avere lunghezza zero. Il passaggio corretto è invece  $\sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t} = 3|\sin t \cos t|$ . Dividendo l'intervallo  $[0, 2\pi]$  a seconda del segno di  $\sin t \cos t$ , si trova

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| \, dt = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos t \, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 3 \sin t \cos t \, dt \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3 \sin t \cos t \, dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} 3 \sin t \cos t \, dt = 6. \end{aligned}$$

- Nota: ci sono diversi modi equivalenti di parametrizzare la retta tangente alla curva. Noi prendiamo come equazioni parametriche quelle date da

$$x = x_0 + x'(t_0)t, \quad y = y_0 + y'(t_0)t.$$

L'equazione cartesiana della retta tangente invece si ricava dalla formula

$$y'(t_0)(x - x_0) = x'(t_0)(y - y_0).$$

- (a)  $P_1$  corrisponde a  $t = 0$ , la retta tangente ha equazione parametrica  $x = 0$ ,  $y = 2t$  ed equazione cartesiana  $x = 0$  (coincide con l'asse  $y$ ).  
 $P_2$  non appartiene alla curva,  
 $P_3 = \gamma(\pi/4)$ , la retta tangente ha eq. par.  $x = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}t$ ,  $y = \sqrt{2} + \sqrt{2}t$  ed eq. cart.  $x + y = 2\sqrt{2} - 2$ .
- (b)  $P_1$  non appartiene alla curva,  
 $P_2 = \gamma(\pi/6)$ , la retta tangente ha equaz. param.  $x = \sqrt{3} - t$ ,  $y = 1 + 2\sqrt{3}t$  ed eq. cart.  $2\sqrt{3}x + y = 7$ ,  
 $P_3$  non appartiene alla curva.
- (c)  $P_1 = \gamma(1)$ , la retta tangente ha eq. par.  $x = 4t$ ,  $y = t$  ed eq. cart.  $x - 4y = 0$ ,  
 $P_2$  non appartiene alla curva,  
 $P_3 = \gamma(-1)$ , la retta tangente ha eq. par.  $x = -4t$ ,  $y = -2 + t$  ed eq. cart.  $x + 4y = -8$ .

4. Al variare di  $t \in [0, 2\pi]$ , le uguaglianze  $\cos t = 0$ ,  $\sin 2t = 0$  sono soddisfatte simultaneamente per  $t = \pi/2$  o  $t = 3\pi/2$ . Quindi la curva passa due volte per l'origine. I vettori velocità corrispondenti sono  $\gamma'(\pi/2) = (-1, -2)$  e  $\gamma'(3\pi/2) = (1, -2)$ ; essi non sono paralleli, quindi le rette tangenti non coincidono. Le equazioni (ad es. cartesiane) delle rette tangenti sono rispettivamente  $y = 2x$  e  $y = -2x$ .

5. (a)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^2 [t^2 + (2t + 1)2t] dt = \frac{52}{3}$ .
- (b)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{-1}^1 [(t^3 + 2t)(3t^2) - t^3] dt = 0$ .
- (c)  $\gamma(t) = (t, 2t - 1)$  con  $t \in [0, 1]$ ,  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 [2(2t - 1) - 4t] dt = -2$ .
- (d)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (R \cos t) \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$ .
- (e)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + t^2] dt = 2\pi + \frac{8}{3}\pi^3$ .
- (f)  $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{t^2 + 1} + (t^2 - t)2t + e^{t^3}(3t^2) \right] dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + e$ .
6. (a)  $\mathbf{F}$  è conservativo e un suo potenziale è  $U(x, y) = x^2 \sin y$ .  
 (b)  $\mathbf{F}$  non è conservativo.  
 (c)  $\mathbf{F}$  è conservativo e un suo potenziale è  $U(x, y) = xe^{-y} + y^2$ .  
 (d)  $\mathbf{F}$  non è conservativo.  
 (e)  $\mathbf{F}$  è conservativo e un suo potenziale è  $U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + 1)$ .  
 (f)  $\mathbf{F}$  non è conservativo.

7. In tutti i casi proposti, il campo risulta conservativo ed è conveniente calcolare l'integrale come differenza di potenziale.

- (a) potenziale  $U = e^{x^2 y}$ , integrale  $U(1, 3) - U(1, -1) = e^3 - e^{-3}$ .

- (b) potenziale  $U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^4 + y^2 + 1)$ , integrale  $U(0, e^5) - U(1, 0) = \frac{1}{2}(\ln(e^{10} + 1) - \ln 2)$ .  
 (c) potenziale  $U(x, y) = \frac{1}{2} e^{2x} \sin(4\pi y) + y^2 x$ , integrale  $U(-1, 0) - U(0, 1) = 0$ .  
 (d) potenziale  $U(x, y) = \frac{1}{2} e^{2xy} - yx$ , integrale  $U(-2, 2) - U(0, 0) = \frac{e^{-8} - 1}{2} + 4$ .

8. (a)  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $U(x, y) = -\frac{x}{2} \cos(y^2)$ , l'integrale vale  $-\frac{1}{2}$ .  
 (b)  $a = 2$ ,  $U(x, y) = y \operatorname{arctg}(x^2)$ , l'integrale vale 0.  
 (c)  $\mathbf{F}$  non è conservativo per nessun valore di  $a$ .  
 (d)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $U(x, y) = \frac{1}{2} e^{2x^2+y} + x^2 e^{y^2}$ , l'integrale vale  $\frac{e^2+1}{2}$ .

9. (a) Poniamo  $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ , dove  $\mathbf{G} = (2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y})$  e  $\mathbf{H} = (y, 2x + y)$ . In questo modo  $\mathbf{G}$  è conservativo e ha come potenziale  $U(x, y) = e^{x^2y}$ . Otteniamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = (1 - e) + \frac{11}{6} = \frac{17}{6} - e,$$

dove il primo integrale è calcolato usando il potenziale e il secondo con la definizione. NB è possibile definire i campi  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$  in altri modi, ad es.  $\mathbf{G} = (2xye^{x^2y} + y, x^2e^{x^2y} + x + y)$  e  $\mathbf{H} = (0, x)$ ; i conti sono simili.

- (b) Posto  $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ , dove  $\mathbf{G} = (2x \cos[\pi(x^2 - y^2)], -2y \cos[\pi(x^2 - y^2)])$  e  $\mathbf{H} = (0, x^2)$ , si ha che  $\mathbf{G} = \nabla U$  dove  $U(x, y) = \frac{1}{\pi} \sin[\pi(x^2 - y^2)]$  e pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = 0 + \frac{8}{15} = \frac{8}{15}.$$

10. (a) Il punto è  $\gamma(-\frac{2}{3}\pi) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . La retta tangente ha equazione

$$x = \sqrt{3}t, \quad y = \frac{-\sqrt{3} + t}{2}.$$

- (b) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 2)y^4 + ye^x$$

pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(1, 1) - U(-1, 0) = \frac{3}{2} + e.$$

11. (a) Abbiamo  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 + 16t^6}$ , il cui integrale non è agevole da calcolare. Volendo fare una stima anziché un calcolo esatto, possiamo osservare che per  $t \in [0, 1]$  la funzione  $\sqrt{4 + 16t^6}$  è crescente ed è quindi compresa tra un valore minimo di 2 e uno massimo di  $\sqrt{20}$  assunti per  $t = 0$  e  $t = 1$  rispettivamente. La lunghezza della curva, data dall'integrale su  $[0, 1]$  di questa funzione, sarà quindi compresa tra questi due valori moltiplicati per la lunghezza dell'intervallo, che è 1. (b) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x, y) = 2e^{x^2-3y} + y^{10}$$

pertanto

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = U(2, 1) - U(0, 0) = 2e - 1.$$

12. (a) Il campo è conservativo per  $a = 1$ .  
(b) Per  $a = 1$ , un potenziale di  $\mathbf{F}$  è

$$U(x, y) = \frac{1}{4} \ln(1 + 2x^2 + y^4) + xy,$$

pertanto l'integrale richiesto vale

$$U(0, 2) - U(1, 0) = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{17}{9} \right).$$

(c) Indicando con  $\mathbf{F}^{(1)}$  il campo con  $a = 1$ , possiamo scrivere il campo con  $a$  qualunque come  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} + (a - 1)\mathbf{G}$ , dove  $\mathbf{G} = (0, x)$ . L'integrale di  $\mathbf{F}^{(1)}$  è stato calcolato in (ii), mentre quello di  $\mathbf{G}$  si calcola usando la definizione:

$$\int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)(2 \cos t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Concludiamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} \mathbf{F}^{(1)} \cdot d\mathbf{x} + (a - 1) \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{17}{9} \right) + (a - 1) \frac{\pi}{2}.$$