UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi del 19.XII.2020

1. Le curve hanno tutte parametrizzazioni di classe C^∞. Per studiare la regolarità calcoliamo $\gamma'(t)$ e verifichiamo se si può annullare.
   (a) $\gamma'(t) = (-R \operatorname{sen} t, R\cos t)$, non nullo per ogni t, curva regolare.
   (b) $\gamma'(t) = (\,-3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,,\; 3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,)$, si annulla per $t = 0, \pi/2, \pi, (3/2)\pi, 2\pi$, i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ non sono regolari.
   (c) $\gamma'(t) = (\,e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\,,\; e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)\,)$, non nullo per ogni t, curva regolare. (Nota: piuttosto che studiare l'annullamento simultaneo di $x'(t)$ e $y'(t)$, può convenire in questo caso calcolare $||\gamma'(t)||$; si trova che $||\gamma'(t)|| = \sqrt{2}e^t$ e quindi $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t.)
   (d) $\gamma'(t) = (\,3t^2\,,\; 2t\,)$, si annulla per $t = 0$, l'origine è un punto non regolare.
   (e) $\gamma'(t) = (\,-\operatorname{sen} t\,,\; \cos t, 1\,)$, non nullo per ogni t, curva regolare.

2. (a) $L(\gamma) = 2\pi R$ (b) $L(\gamma) = 6$ (c) $L(\gamma) = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$ (d) $L(\gamma) = \dfrac{2}{27}\left(13^{\frac{3}{2}} - 8\right)$

   (e) $L(\gamma) = 2\sqrt{2}\pi$.

   NB Sottolineiamo un errore frequente nel caso (b). Per tale curva si trova
   $$||\gamma'(t)|| = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}.$$
   Se si semplifica erroneamente $\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} = 3\operatorname{sen} t\cos t$, si trova
   $$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen} t\cos t\, dt = 0,$$
   conclusione evidentemente sbagliata, perché una curva (non costante) non può avere lunghezza zero. Il passaggio corretto è invece $\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} = 3|\operatorname{sen} t\cos t|$. Dividendo l'intervallo $[0, 2\pi]$ a seconda del segno di $\operatorname{sen} t\cos t$, si trova
   $$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} 3|\operatorname{sen} t\cos t|\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\operatorname{sen} t\cos t\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 3\operatorname{sen} t\cos t\, dt \\ &\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} 3\operatorname{sen} t\cos t\, dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi} 3\operatorname{sen} t\cos t\, dt = 6. \end{aligned}$$

3. Nota: ci sono diversi modi equivalenti di parametrizzare la retta tangente alla curva. Noi prendiamo come equazioni parametriche quelle date da
   $$x = x_0 + x'(t_0)t, \qquad y = y_0 + y'(t_0)t.$$
   L'equazione cartesiana della retta tangente invece si ricava dalla formula
   $$y'(t_0)(x - x_0) = x'(t_0)(y - y_0).$$

(a) P_1 corrisponde a $t=0$, la retta tangente ha equazione parametrica $x=0$, $y=2t$ ed equazione cartesiana $x=0$ (coincide con l'asse y).
P_2 non appartiene alla curva,
$P_3=\gamma(\pi/4)$, la retta tangente ha eq. par. $x=-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}t$, $y=\sqrt{2}+\sqrt{2}t$ ed eq. cart. $x+y=2\sqrt{2}-2$.

(b) P_1 non appartiene alla curva,
$P_2=\gamma(\pi/6)$, la retta tangente ha equaz. param. $x=\sqrt{3}-t$, $y=1+2\sqrt{3}t$ ed eq. cart. $2\sqrt{3}x+y=7$,
P_3 non appartiene alla curva.

(c) $P_1=\gamma(1)$, la retta tangente ha eq. par. $x=4t$, $y=t$ ed eq. cart. $x-4y=0$,
P_2 non appartiene alla curva,
$P_3=\gamma(-1)$, la retta tangente ha eq. par. $x=-4t$, $y=-2+t$ ed eq. cart. $x+4y=-8$.

4. (a) $\displaystyle\int_\gamma (x^2y+y^3)\,ds=\int_0^\pi 16\operatorname{sen}t\,dt=32.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds=\int_0^{2\pi} e^{3t}\sqrt{10}\,dt=\frac{\sqrt{10}}{3}(e^{6\pi}-1).$

(c) $\displaystyle\int_\gamma xy\,ds=\int_0^{\pi/2} 6\cos t\operatorname{sen}t\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t+9\cos^2 t}\,dt=-\frac{3}{5}\int_9^4\sqrt{u}\,du=\frac{38}{5}.$

(d) $\displaystyle\int_\gamma y(x-2y^4)\,ds=-\int_0^2 t^5\sqrt{16t^6+1}\,dt=-\frac{1}{144}(1025^{3/2}-1).$

(e) $\displaystyle\int_\gamma (xy-2y+z^2)\,ds=\int_0^{2\pi}(9\cos t\operatorname{sen}t-6\operatorname{sen}t+4t^2)\sqrt{13}\,dt=\frac{32}{3}\sqrt{13}\pi^3.$

(f) $\displaystyle\int_\gamma\left(\frac{2}{3}x+4z\right)\,ds=\int_0^1(2t+4t^3)3\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=2(3\sqrt{3}-1).$

5. (a) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_0^2[t^2+(2t+1)2t]\,dt=\frac{52}{3}.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_{-1}^1[(t^3+2t)(3t^2)-t^3]\,dt=0.$

(c) $\gamma(t)=(t,2t-1)$ con $t\in[0,1]$, $\qquad\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_0^1[2(2t-1)-4t]\,dt=-2.$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-R\operatorname{sen}t}{R^2}(-R\operatorname{sen}t)+\frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)\right]\,dt=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi.$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_0^{2\pi}\left[(-\operatorname{sen}t)(-\operatorname{sen}t)+(\cos t)(\cos t)+t^2\right]\,dt=2\pi+\frac{8}{3}\pi^3.$

(f) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{t^2+1}+(t^2-t)2t+e^{t^3}(3t^2)\right]\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}+e.$

6. (a) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x,y)=x^2\sin y$.

(b) $\mathbf{F}$ non è conservativo.

(c) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x,y) = xe^{-y} + y^2$.

(d) $\mathbf{F}$ non è conservativo.

(e) $\mathbf{F}$ è conservativo e un suo potenziale è $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1)$.

(f) $\mathbf{F}$ non è conservativo.

7. In tutti i casi proposti, il campo risulta conservativo ed è conveniente calcolare l'integrale come differenza di potenziale.

   (a) potenziale $U = e^{x^2 y}$, integrale $U(1,3) - U(1,-1) = e^3 - e^{-3}$.

   (b) potenziale $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^4+y^2+1)$, integrale $U(0,e^5) - U(1,0) = \frac{1}{2}(\ln(e^{10}+1) - \ln 2)$.

   (c) potenziale $U(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen}(4\pi y) + y^2 x$, integrale $U(-1,0) - U(0,1) = 0$.

   (d) potenziale $U(x,y) = \frac{1}{2}e^{2xy} - yx$, integrale $U(-2,2) - U(0,0) = \frac{e^{-8}-1}{2} + 4$.

8. (a) $a = -\frac{1}{2}$, $U(x,y) = -\frac{x}{2}\cos(y^2)$, l'integrale vale $-\frac{1}{2}$.

   (b) $a = 2$, $U(x,y) = y\operatorname{arctg}(x^2)$, l'integrale vale 0.

   (c) $\mathbf{F}$ non è conservativo per nessun valore di a.

   (d) $a = \frac{1}{2}$, $U(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x^2+y} + x^2 e^{y^2}$, l'integrale vale $\frac{e^2+1}{2}$.

9. (a) Poniamo $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, dove $\mathbf{G} = (\, 2xye^{x^2 y} \,,\, x^2 e^{x^2 y} \,)$ e $\mathbf{H} = (\, y \,,\, 2x + y \,)$. In questo modo $\mathbf{G}$ è conservativo e ha come potenziale $U(x,y) = e^{x^2 y}$. Otteniamo

   $$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = \int_\gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{dx} + \int_\gamma \mathbf{H} \cdot \mathbf{dx} = (1-e) + \frac{11}{6} = \frac{17}{6} - e,$$

   dove il primo integrale è calcolato usando il potenziale e il secondo con la definizione. NB è possibile definire i campi $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ in altri modi, ad es. $\mathbf{G} = (\, 2xye^{x^2 y} + y \,,\, x^2 e^{x^2 y} + x + y \,)$ e $\mathbf{H} = (0, x)$; i conti sono simili.

   (b) Posto $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, dove $\mathbf{G} = (\, 2x\cos[\pi(x^2-y^2)] \,,\, -2y\cos[\pi(x^2-y^2)] \,)$ e $\mathbf{H} = (\, 0 \,,\, x^2 \,)$, si ha che $\mathbf{G} = \nabla U$ dove $U(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin[\pi(x^2-y^2)]$ e pertanto

   $$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx} = \int_\gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{dx} + \int_\gamma \mathbf{H} \cdot \mathbf{dx} = 0 + \frac{8}{15} = \frac{8}{15}.$$

10. (a) Il punto è $\gamma\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. La retta tangente ha equazione

   $$x = \sqrt{3}t, \qquad y = \frac{-\sqrt{3}+t}{2}.$$

   (b) L'integrale vale

   $$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \operatorname{sen} t \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = \frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{u}\, du = \frac{14}{9}.$$

(c) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+2)y^4 + ye^x$$

pertanto

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = U(1,1) - U(-1,0) = \frac{3}{2} + e.$$

11. (a) L'integrale vale

$$\int_0^1 2t((2t)^4 - 4t^4)\sqrt{4+16t^6}\,dt = \frac{1}{4}\int_4^{20}\sqrt{u}\,du = \frac{4}{3}(5^{3/2}-1).$$

(b) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x,y) = 2e^{x^2-3y} + y^{10}$$

pertanto

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = U(2,1) - U(0,0) = 2e - 1.$$

12. (a) Si trova che $||\gamma'(t)|| = \sqrt{4+4\pi^2t^2}$, che positivo per ogni t. Quindi γ' non si annulla e la curva è regolare.
(b) L'integrale vale (attenzione al segno quando si semplifica la radice di un quadrato)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\,ds &= \int_{-1}^1 \sqrt{4t^2(\cos^2\pi t + \operatorname{sen}^2 \pi t)}\,\sqrt{4+4\pi^2t^2}\,dt = \int_{-1}^1 4|t|\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt \\
&= -\int_{-1}^0 4t\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt + \int_0^1 4t\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt \\
&= -\frac{2}{\pi^4}\int_{1+\pi^2}^1 \sqrt{u}\,du + \frac{2}{\pi^4}\int_1^{1+\pi^2}\sqrt{u}\,du = \frac{8}{3\pi^4}[(1+\pi^2)^{3/2}-1].
\end{aligned}$$

(c) Il campo è conservativo, e un suo potenziale è

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^4+1) + \frac{x^6y^3}{3} + e^y$$

pertanto

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = U(-2,0) - U(2,0) = 0.$$

13. Applicando il teorema di Stokes nel piano troviamo

(a) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dxdy = \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^{-2x}(-6x+2)\,dy = \int_{-2}^0 (9x^2-3x)\,dx = 30.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dxdy = \int_0^2 d\rho\int_{-\pi}^0 -8(2+\rho\cos\theta)\rho\,d\theta = \int_0^2(-16\pi)\rho\,d\rho = -32\pi.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F}\,dxdy = \int_2^3 d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} (-6\rho\cos\theta + 2)\rho\,d\theta = \int_2^3 (6\rho^2 + \pi\rho)d\rho = 38 + \frac{5}{2}\pi.$

14. Il campo è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ eccetto l'origine, e un calcolo diretto (fatto a lezione) mostra che $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$. Sia γ una curva chiusa semplice e sia Ω l'insieme limitato di cui γ è la frontiera. Se Ω non contiene l'origine, allora $\mathbf{F}$ è definito su Ω, e possiamo applicare il teorema di Stokes per trovare

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx} = \int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{F} = 0.$$

Se invece Ω contiene l'origine, allora il teorema di Stokes non si può applicare perchè $\mathbf{F}$ non è definito su tutto Ω, e quindi non si può concludere che l'integrale sia nullo. L'esercizio 5(d) mostra che in effetti l'integrale in questo caso può essere diverso da zero.

15. Per cercare un esempio con la proprietà richiesta può aiutarci il teorema di Stokes, che dice che l'integrale curvilineo di un campo $\mathbf{F}$ sulla circonferenza del testo è uguale all'integrale doppio del rotore di $\mathbf{F}$ sul cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1, che indicheremo con Ω (supponendo che il campo $\mathbf{F}$ sia definito su tutto Ω). Questo mostra che le proprietà richieste sono soddisfatte se $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ è una funzione diversa da zero (e quindi sicuramente $\mathbf{F}$ non è conservativo), ma che ha integrale nullo su Ω. Per risolvere l'esercizio, basta quindi (i) trovare una funzione $f(x,y)$ che non sia identicamente nulla, ma che abbia integrale nullo sul cerchio Ω
(ii) trovare un campo $\mathbf{F}$ che abbia per rotore la funzione f trovata in (i).
Questo si può fare in infiniti modi. Per il passo (i) ci si può aiutare con considerazioni di simmetria: si può prendere ad esempio la funzione $f(x,y) = x$. Il passo (ii) si traduce allora in

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = x.$$

Abbiamo due funzioni da scegliere, F_1 e F_2, e una sola relazione da soddisfare, quindi c'è abbondanza di soluzioni: possiamo ad esempio scegliere $F_2 \equiv 0, F_1 = -xy$. Il campo $\mathbf{F} = (-xy, 0)$ è quindi un esempio con le proprietà richieste.