UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi – 18.I.2023

1. Dire se le curve seguenti sono regolari; in caso contrario, dire quali sono i punti non regolari della curva.

   (a) $\gamma(t) = (\, R\cos t\,,\ R\,\mathrm{sen}\, t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (circonferenza di raggio R).

   (b) $\gamma(t) = (\, \cos^3 t\,,\ \mathrm{sen}^3 t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (asteroide).

   (c) $\gamma(t) = (\, e^t \cos t\,,\ e^t\,\mathrm{sen}\, t\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi]$ (spirale logaritmica).

   (d) $\gamma(t) = (\, t^3\,,\ t^2\,) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [-1, 1]$.

   (e) $\gamma(t) = (\, \cos t\,,\ \mathrm{sen}\, t, t\,) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 2\pi]$ (porzione di elica cilindrica).

2. Calcolare la lunghezza di ciascuna delle curve dell'esercizio precedente.

3. Per ciascuno dei casi seguenti, si determini quali tra i punti P_1, P_2, P_3 appartengono alla curva $\gamma(t)$; inoltre, per i punti che appartengono, si determini l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta tangente a γ.

   (a) $\gamma(t) = (-2 + 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (2,0),\ P_3 = (-2+\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   (b) $\gamma(t) = (2\cos t, -1 + 4\,\mathrm{sen}\, t),\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (\sqrt{3}, 1),\ P_3 = (-2, -1)$.

   (c) $\gamma(t) = (2t^2 - 2, t - 1),\ t \in [-2, 2]$, $\quad P_1 = (0,0),\ P_2 = (3,1),\ P_3 = (0,-2)$.

4. Sia γ la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, 2t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. Mostrare che la curva passa due volte per l'origine con tangenti diverse, e trovare le equazioni delle due rette tangenti.

5. In ciascuno dei casi seguenti, si calcoli l'integrale del campo $\mathbf{F}$ sulla curva γ.

   (a) $\gamma(t) = (t, t^2)$ per $t \in [0, 2]$, campo $\mathbf{F}(x, y) = (\, y\,,\ 2x + 1\,)$.

   (b) $\gamma(t) = (t^3, t)$ per $t \in [-1, 1]$, campo $\mathbf{F}(x, y) = (\, x + 2y\,,\ -x\,)$.

   (c) γ segmento che va dal punto $(0, -1)$ al punto $(1, 1)$, campo $\mathbf{F}(x, y) = (\, 2y\,,\ -2x\,)$

   (d) $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$, con $R > 0$ costante fissata, $t \in [0, 2\pi]$,

   campo $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}\,, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$

(e) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y\,,\ x\,,\ z^2)$.

(f) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$, campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{x^2+1}\,,\ y - x\,,\ e^{xy}\right)$.

6. In ciascuno dei casi seguenti, dire se il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

   (a) $\mathbf{F}(x, y) = (\,2x \sin y\,,\ x^2 \cos y\,)$.

   (b) $\mathbf{F}(x, y) = (\,3x^2 y\,,\ 2xy\,)$.

   (c) $\mathbf{F}(x, y) = (\,e^{-y}\,,\ -xe^{-y} + 2y\,)$.

   (d) $\mathbf{F}(x, y) = (\,y \sin y\,,\ x \cos x\,)$.

   (e) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+1}\,,\ \dfrac{y}{x^2+y^2+1}\right)$.

   (f) $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^2+1}\,,\ \dfrac{x}{y^2+1}\right)$.

7. In ciascuno dei casi seguenti, si calcoli l'integrale del campo $\mathbf{F}$ sulla curva γ.

   (a) campo $\mathbf{F}(x, y) = (\,2xye^{x^2 y}\,,\ x^2 e^{x^2 y}\,)$,
   curva $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen}^3 t, \cos^2 t - 2\cos t)$, per $t \in [0, \pi]$,

   (b) campo $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{2x^3}{x^4+y^2+1}\,,\ \dfrac{y}{x^4+y^2+1}\right)$,

   curva $\gamma(t) = \left(e^t \cos \frac{\pi}{2} t, e^t \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t\right)$, per $t \in [0, 5]$,

   (c) campo $\mathbf{F}(x, y) = (\,e^{2x} \sin(4\pi y) + y^2\,,\ 2\pi e^{2x} \cos(4\pi y) + 2yx\,)$,
   curva $\gamma(t) = (t^3 - 2t, (1-t)e^{t^2})$, per $t \in [0, 1]$.

   (d) campo $\mathbf{F}(x, y) = (\,ye^{2xy} - y\ ,\ e^{2y} + xe^{2xy} - x\,)$,
   curva $\gamma(t) = (t^3 - 5t, te^{t^2 - 4})$, per $t \in [0, 2]$.

8. Per ciascuno dei casi seguenti, dire se esistono valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui il campo $\mathbf{F}$ è conservativo. Nei casi in cui $\mathbf{F}$ è conservativo, calcolarne un potenziale e calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione

$$\gamma(t) = (\,t + \sin t \ln(2-t)\,,\ (t-1)^2 \ln(2 - \cos t)\,), \qquad t \in [0, 1].$$

   (a) $\mathbf{F}(x, y) = (\,a \cos(y^2)\,,\ xy \sin(y^2)\,)$.

(b) $\mathbf{F}(x,y) = \left(\dfrac{axy}{1+x^4} \, , \, \mathrm{arctg}(x^2) \right)$.

(c) $\mathbf{F}(x,y) = (\, 3xe^y \, , \, a(2xy + y^2) \,)$.

(d) $\mathbf{F}(x,y) = (\, 2x(e^{2x^2+y} + e^{y^2}) \, , \, a(e^{2x^2+y} + 4x^2ye^{y^2}) \,)$.

9. Per ciascuno dei casi seguenti, calcolare l'integrale del campo $\mathbf{F}$ sulla curva di equazione

$$\gamma(t) = (\, t^2 - 1 \, , \, t + 1 \,), \qquad t \in [0,1].$$

(Suggerimento: i campi non sono conservativi, ma possono essere scritti come somma di un campo conservativo più uno il cui integrale è semplice da calcolare con la definizione)

(a) $\mathbf{F}(x,y) = \left(2xye^{x^2y} + y \, , \, x^2e^{x^2y} + 2x + y \right)$.

(b) $\mathbf{F}(x,y) = (\, 2x\cos[\pi(x^2 - y^2)] \, , \, -2y\cos[\pi(x^2 - y^2)] + x^2 \,)$.

10. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, 1 + 2\cos t \, , \, \sin t \,), \qquad t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2} \right].$$

(a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse y e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.

(b) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\mathbf{F} = (\, xy^4 + ye^x \, , \, 2y^3(x^2+2) + e^x \,)$.

11. Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, 2t \, , \, t^4 \,), \qquad t \in [0,1] \, .$$

(a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 2 e $\sqrt{20}$.

(b) Trovare un potenziale del campo $\mathbf{F} = \left(4xe^{x^2-3y} \, , \, 10y^9 - 6e^{x^2-3y} \right)$ e calcolare l'integrale di F su γ.

12. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{x}{1+2x^2+y^4} + y \, , \, \frac{y^3}{1+2x^2+y^4} + ax \right)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro .

(a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

(c) Calcolare lo stesso integrale del punto precedente per ogni valore di a.