

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte (sintetiche) agli esercizi dell'11.I.2020

1. In ciascuno dei tre casi la funzione possiede una primitiva, data rispettivamente da

$$(a) \quad F(z) = \frac{4z^3}{3}, \quad (b) \quad F(z) = -\frac{1}{z}, \quad (c) \quad F(z) = \frac{e^{\pi z}}{\pi}.$$

L'integrale è quindi uguale a  $F(z_1) - F(z_0)$ , dove  $z_0 = \gamma(0) = 1$  e  $z_1 = \gamma(1) = 1 + i$ . Si trova

$$(a) \quad \frac{4}{3}(2i - 3), \quad (b) \quad \frac{1+i}{2} \quad (c) \quad F(z) = -\frac{2e^{\pi}}{\pi}.$$

2. (a) Le singolarità di  $f$  sono  $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)$  per  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .  
I corrispondenti residui valgono

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{z_k}{6},$$

perché  $z_k^6 = -1$  per ogni  $k$ . Applicando il teorema dei residui si trova che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1) + \operatorname{Res} f(z_2)) = \frac{2}{3}\pi.$$

- (b) Singolarità  $z_k = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$  per  $k = 0, 1, 2, 3$ .

$$\text{Residui: } \operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{4z_k}. \quad \text{Integrale } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

- (c) Singolarità  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ . Residui:  $\operatorname{Res} f(i) = i/2$ ,  $\operatorname{Res} f(-i) = -i/2$ .

$$\text{Integrale } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = -\pi.$$

3. (a) Singolarità:  $z_k = 2k\pi i$  per  $k$  intero. Residui:  $\operatorname{Res} f(z_k) = -4k^2\pi^2 + 1$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \operatorname{Res} f(z_0) = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(2\pi i) + \operatorname{Res} f(-2\pi i)) = 2\pi i (3 - 8\pi^2)$$

- (b) Singolarità:  $z_k = (\pi + 2k\pi)i$  per  $k$  intero. Residui:  $\operatorname{Res} f(z_k) = -z_k$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(\pi i) + \operatorname{Res} f(3\pi i) + \operatorname{Res} f(-\pi i) + \operatorname{Res} f(-3\pi i)) = 0.$$

(c) Singolarità:  $z_k = (-\pi/2 + 2k\pi)i$  per  $k$  intero. Residui:  $\text{Res } f(z_k) = 2iz_k$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \text{Res } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi^2 i$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \left[ \text{Res } f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \text{Res } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{Res } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = 6\pi^2 i.$$

4. (a) Singolarità  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ . Residui:  $\text{Res } f(i) = \text{Res } f(-i) = \frac{1}{4} \left( e - \frac{1}{e} \right)$ .

$$\text{Integrale } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res } f(i) + \text{Res } f(-i)) = \pi \left( e - \frac{1}{e} \right) i.$$

(b) Singolarità  $z_1 = \pi$ ,  $z_2 = -\pi$ . Residui:  $\text{Res } f(\pm\pi) = \pm \frac{1}{2\pi}$ .

$$\text{Integrale } \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

5. Indichiamo con  $\gamma$  la circonferenza di centro  $2i$  e raggio 2. Abbiamo che un punto  $z$  è racchiuso da  $\gamma$  se e solo se  $|z - 2i|^2 < 4$ .

(a) Le singolarità di  $f$  sono racchiuse da  $\gamma$  sono

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

e i residui corrispondenti valgono  $\text{Res } f(z_k) = -\frac{z_k}{4}$ . Abbiamo

$$|z_0 - 2i|^2 = |z_1 - 2i|^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right)^2 = 5 - 2\sqrt{2} < 4,$$

quindi  $z_0, z_1$  sono racchiuse da  $\gamma$ . Invece  $z_2, z_3$  non sono racchiuse, come segue da un calcolo analogo, oppure, più direttamente, osservando che  $\gamma$  è contenuta nel semipiano complesso superiore mentre  $z_2, z_3$  sono nel semipiano inferiore. Si ha quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left( -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{4\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Le singolarità di  $f$  sono le  $z_k$  dell'esercizio 2(a). I residui in questo caso valgono

$$\text{Res } f(z_k) = \frac{z_k^4}{6z_k^5} = \frac{1}{6z_k} = \frac{\bar{z}_k}{6|z_k|^2} = \frac{\bar{z}_k}{6}.$$

Si verifica che le singolarità racchiuse da  $\gamma$  sono  $z_0, z_1, z_2$  e pertanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f(z_0) + \text{Res } f(z_1) + \text{Res } f(z_2)] = \frac{2}{3}\pi.$$

(c) L'unica singolarità racchiusa è  $z = i$ , pertanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res } f(i) = 2\pi i \frac{e^{-\pi}}{2i} = \pi e^{-\pi}.$$

6. Le singolarità della funzione sono  $z_0 = 2$ ,  $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$  e i residui valgono rispettivamente  $\text{Res } f(z_k) = \frac{1}{3z_k^2} = \frac{z_k}{24}$ . Per  $0 < R < \sqrt{3}$  la curva  $\gamma_R$  non racchiude singolarità e l'integrale vale zero. Per  $\sqrt{3} < R < 3$ , la curva racchiude  $z_1$  e  $z_2$  e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left( \frac{z_1}{24} + \frac{z_2}{24} \right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Per  $R > 3$  tutte le singolarità sono racchiuse e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left( \frac{z_0}{24} + \frac{z_1}{24} + \frac{z_2}{24} \right) = 0.$$

Per  $R = \sqrt{3}$ ,  $R = 3$  la curva non è contenuta nel dominio della funzione.

7. Le singolarità di  $f(z)$  sono:

$$z_0 = 1 + i, \quad z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i.$$

e i residui valgono rispettivamente  $\text{Res } f(z_k) = -\frac{ze^{\pi z}}{16}$ . Per  $0 < R < \sqrt{2}$  la curva  $\gamma_R$  non racchiude singolarità e l'integrale vale zero. Per  $\sqrt{2} < R < \sqrt{10}$ , la curva racchiude  $z_1$  e  $z_2$  e si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f(z_1) + \text{Res } f(z_2)] = -\frac{\pi}{4} i e^{-\pi}.$$

Per  $R > \sqrt{10}$  tutte le singolarità sono racchiuse e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi}{4} i (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

Per  $R = \sqrt{2}$ ,  $R = \sqrt{10}$  la curva non è contenuta nel dominio della funzione.

Indicata con  $\gamma$  la circonferenza del punto (a) si trova

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res } f(z_1) + \text{Res } f(z_2)] = -\frac{\pi}{4} i e^{-\pi}.$$

8. Le singolarità della funzione sono i valori di  $z$  tali che  $e^{\pi z} = i$ , cioè i numeri complessi della forma

$$z_k = \left( \frac{1}{2} + 2k \right) i, \quad k \text{ intero},$$

e i rispettivi residui valgono

$$\text{Res } f(z_k) = \frac{z_k^2}{\pi e^{\pi z_k}} = \frac{z_k^2}{\pi i}.$$

Per  $R = 2$ , le singolarità racchiuse sono  $z_0$  e  $z_{-1}$  e si ha

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \left( \frac{z_0^2}{\pi i} + \frac{z_{-1}^2}{\pi i} \right) = -5.$$

Al tendere di  $R \rightarrow +\infty$  la curva racchiude sempre più singolarità e si trova

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=-K}^K \frac{z_k^2}{\pi i}.$$

La serie non converge, perché il termine generico non va a zero, quindi neanche l'integrale possiede limite finito.