UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Elettronica, Internet

Prova scritta del 6.II.2017 — Compito n.

1. (da svolgere solo per Ing. Elettronica, Internet)
   Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = xy^2 - x^5 + 1 + x^4 - y^2$ e dire se sono di massimo o minimo locale.

2. Calcolare
   $$\iiint_\Omega (x^2 + z^2 + xyz)\, dx\, dy\, dz$$
   dove
   $$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + y^2 \ge 3z^2\}.$$

3. Si consideri la curva parametrica $\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$, con $t \in [-\pi, \pi]$.
   (a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 2π e $2\pi\sqrt{1+\pi^2}$.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo
   $$\mathbf{F}(x,y) = \Big((xy^2+1)e^{xy^2} \ ,\ 2x^2ye^{xy^2} \Big)\,.$$

4. Sia $f(x) = 3\pi - 4|x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Calcolare la serie di Fourier di f e usare le proprietà di tale serie per calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ e della $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

5. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{-\pi i z}}{4z^4+1}$.
   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 1 - i$ e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario.
   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^4+1}\, dx$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse reale).

6. (da svolgere solo per Ing. Civile-Ambientale)
   Sia $f(x,y) = xy$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \ : \ x^2 + 4y^2 = 4\}$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ x^2 + 4y^2 = 4\}$.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + 4y^2 \le 4,\ y \ge 3/5\}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Elettronica, Internet

Prova scritta del 6.II.2017 — Compito n.

1. (da svolgere solo per Ing. Elettronica, Internet)
   Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = xy^2 + 1 - x^5 - x^4 + y^2$ e dire se sono di massimo o minimo locale.

2. Calcolare
$$\iiint_\Omega (y^2 z + 2z^2 - x^2)\, dx\, dy\, dz$$
   dove
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \geq 3z^2\}.$$

3. Si consideri la curva parametrica $\gamma(t) = (t\cos \pi t, t \operatorname{sen} \pi t)$, con $t \in [-1, 1]$.
   (a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 2 e $2\sqrt{1+\pi^2}$.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \Big((1+xy^2)e^{xy^2}\ ,\ 2x^2 y e^{xy^2} \Big).$$

4. Sia $f(x) = \pi - 2|x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Calcolare la serie di Fourier di f e usare le proprietà di tale serie per calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ e della $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

5. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{ze^{\pi i z}}{4z^4+1}$.
   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 1+i$ e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario.
   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{4x^4+1}\, dx$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse reale).

6. (da svolgere solo per Ing. Civile-Ambientale)
   Sia $f(x,y) = xy$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \ : \ 4x^2 + y^2 = 4\}$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ 4x^2 + y^2 = 4\}$.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ 4x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq 1\}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Elettronica, Internet

Prova scritta del 6.II.2017 — Compito n.

1. (da svolgere solo per Ing. Elettronica, Internet)
   Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2y - 1 - y^5 + y^4 - x^2$ e dire se sono di massimo o minimo locale.

2. Calcolare
$$\iiint_\Omega (2z^2 - x^2 + xyz)\,dx\,dy\,dz$$
   dove
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 4,\; x^2+y^2 \ge \frac{z^2}{3}\right\}.$$

3. Si consideri la curva parametrica $\gamma(t) = (t\cos\pi t, t\,\mathrm{sen}\,\pi t)$, con $t \in [-2,2]$.
   (a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 4 e $4\sqrt{1+4\pi^2}$.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \Big((1+xy^2)e^{xy^2} \;,\; 2x^2ye^{xy^2} \Big).$$

4. Sia $f(x) = 2\pi - |x|$ per $x \in (-\pi,\pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di $\mathbb{R}$. Calcolare la serie di Fourier di f e usare le proprietà di tale serie per calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ e della $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

5. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{-iz}}{4z^4+\pi^4}$.
   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 1-i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.
   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^4+\pi^4}\,dx$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse reale).

6. (da svolgere solo per Ing. Civile-Ambientale)
   Sia $f(x,y) = xy$ e sia $\Gamma = \{(x,y) \;:\; x^2+4y^2 = 4\}$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{(x,y) \;:\; x^2+4y^2 = 4\}$.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) \;:\; x^2+4y^2 \le 4,\; y \le 3/5\}$.