UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 5.IX.2018 — Compito n.

1. Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo locale in $(0,0)$:

$$f(x,y) = xy(x+2y+3), \quad g(x,y) = e^{x+y} + 5y^2, \quad h(x,y) = \frac{1}{1+x^4+y^6} - \operatorname{sen}(x^2y^2).$$

2. Sia data la funzione $f(x,y) = 4x^2 - 6y + y^2$.

   (i) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 = 4\}$.

   (ii) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2 \le 4, \ y \ge -x\}$.

3. (i) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il cono (pieno) avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 2 nel piano $z=0$, e per vertice il punto $(0,0,1)$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x,y,z) = 2z + x^3 + 2y^2$.

   (ii) Sia Σ la superficie laterale del cono Ω (cioè il bordo di Ω privato del cerchio di base). Calcolare il flusso attraverso Σ di $\mathbf{F}$ e di $\mathbf{rot}\ \mathbf{F}$, dove

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1+xz)\,\mathbf{i} + (yz - x)\,\mathbf{j} + [(x^3+2y^2)z + 1]\,\mathbf{k}.$$

   (sugg. utilizzare il risultato del punto (i), i teoremi della divergenza e di Stokes).

4. Si consideri il campo vettoriale nel piano $\mathbf{G}(x,y) = y(1-e^{2xy})\,\mathbf{i} + (e^{2y} - xe^{2xy} + ax)\,\mathbf{j}$, dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (i) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{G}$ è conservativo.

   (ii) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{G}\cdot\mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (5t - t^3, 2te^{t^2-4})$, $t \in [0,2]$.

   (iii) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{G}\cdot\mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

5. (solo per Ing. Medica) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{3nx}{4x^2+n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Studiare la convergenza puntuale di f_n. Studiare la convergenza uniforme di f_n su tutto il dominio, sui sottoinsiemi del tipo $[-a,a]$ e su quelli del tipo $[a,+\infty)$.

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+4}$.

   Al variare di $R > 0$, calcolare l'integrale di f su γ_R, dove γ_R è la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio R percorsa in senso antiorario.