UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria dell'Edilizia, Edile e Architettura

Prova scritta del 3.II.2023, compito n. 1

1. (8 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 1$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{\, (x,y) \;:\; x^2 + 4y^2 = 4 \,\}$.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{\, (x,y) \;:\; x^2 + 4y^2 \leq 4 \,\}$.
   (c) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{\, (x,y) \;:\; x^2 + 4y^2 \leq 4,\, x \geq 1 \,\}$.

2. (9 punti) (a) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = y + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sul quarto di sfera

$$S = \{\, (x,y,z) \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\, y \leq 0,\, z \geq 0 \,\}.$$

   (b) Calcolare l'integrale di $g(x,y,z) = \dfrac{yz}{x^2 + y^2}$ sull'insieme $T \subset S$ definito da

$$T = \{\, (x,y,z) \in S \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2,\, x^2 + y^2 \geq 1,\, y \leq 0,\, z \geq 0 \,\}.$$

3. (7 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, 1 + \cos^3 t \,,\, 1 + \operatorname{sen}^3 t \,), \qquad t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$$

   (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto con $x = y$, e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Calcolare l'integrale su γ del campo $\mathbf{F} = (\, x(e^{2y} + 1) \,,\, x^2 e^{2y} + e^y \,)$.

4. (6 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y^3 x e^{-x^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   (i) Trovare la soluzione dell'equazione nel caso $y_0 = 1$.
   (ii) Trovare la soluzione dell'equazione nei casi $y_0 = 0$ e $y_0 = -1$.
   (iii) Dire per quali valori di y_0 la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria dell'Edilizia, Edile e Architettura

Prova scritta del 3.II.2023, compito n. 2

1. (8 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = 2x - x^2 - y^2$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}$.

   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \right\}$.

   (c) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \left\{ (x,y) \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1, \ x \le -1 \right\}$.

2. (9 punti) (a) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = z + x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sul quarto di sfera

$$S = \{ (x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 2, \ x \ge 0, \ z \le 0 \}.$$

   (b) Calcolare l'integrale di $g(x,y,z) = \dfrac{xz}{x^2+y^2}$ sull'insieme $T \subset S$ definito da

$$T = \{ (x,y,z) \in S \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 2, \ x^2+y^2 \ge 1, \ x \ge 0, \ z \le 0 \}.$$

3. (7 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\, -\cos^3 t \,, \ \operatorname{sen}^3 t \,), \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

   (a) Mostrare che γ possiede un solo punto sulla retta $y = -x$, e trovare l'equazione della retta tangente a γ in tale punto.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Calcolare l'integrale su γ del campo $\mathbf{F} = (\, x(e^{2y}+1) \,, \ x^2e^{2y} + e^y \,)$.

4. (6 punti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4y^3xe^{-x^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

   (i) Trovare la soluzione dell'equazione nel caso $y_0 = 1$.
   (ii) Trovare la soluzione dell'equazione nei casi $y_0 = 0$ e $y_0 = -1$.
   (iii) Dire per quali valori di y_0 la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria dell'Edilizia, Edile e Architettura

Prova scritta del 3.II.2023, compito n. 3

1. (8 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $\Gamma = \{\,(x,y)\ :\ 4x^2 + y^2 = 4\,\}$.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $K = \{\,(x,y)\ :\ 4x^2 + y^2 \le 4\,\}$.
   (c) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{\,(x,y)\ :\ 4x^2 + y^2 \le 4,\ y \le -1\,\}$.

2. (9 punti) (a) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = x + z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ sul quarto di sfera
$$S = \{\,(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \ge 0,\ z \le 0\,\}.$$
   (b) Calcolare l'integrale di $g(x,y,z) = \dfrac{xz}{x^2+y^2}$ sull'insieme $T \subset S$ definito da
$$T = \{\,(x,y,z) \in S\ :\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2 \ge 1,\ x \ge 0,\ z \le 0\,\}.$$

3. (7 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica
$$\gamma(t) = (\,1+\cos^3 t\,,\ 1+\operatorname{sen}^3 t\,), \qquad t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right].$$
   (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto con $x = y$, e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
   (b) Calcolare la lunghezza di γ.
   (c) Calcolare l'integrale su γ del campo $\mathbf{F} = (\,e^x + y^2e^{2x}\,,\ y(e^{2x}+1)\,)$.

4. (6 punti) Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 9y^3xe^{-x^2} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
   (i) Trovare la soluzione dell'equazione nel caso $y_0 = 1$.
   (ii) Trovare la soluzione dell'equazione nei casi $y_0 = 0$ e $y_0 = -1$.
   (iii) Dire per quali valori di y_0 la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.