

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Elettronica, Tecn. Internet

Prova scritta del 27.IX.2016

1. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Elettronica, Internet)

Per ciascuna di queste funzioni, dire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale:

$$f(x, y) = e^{x^2 - 2y^2}, \quad g(x, y) = x(x - 1) - 4xy + 5y^2, \quad h(x, y) = (x^3 - 1)y^2.$$

2. (7 punti) Sia T il triangolo di vertici $(-2, -2)$, $(2, -2)$ e $(0, 2)$, e sia S il semicerchio di centro $(0, -2)$ e raggio 2 con $y \leq -2$. Calcolare il baricentro di $T \cup S$.

3. (6 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (2 \cos t + 1, 3 \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

(a) Mostrare che la lunghezza di γ è compresa tra 3π e $\frac{9}{2}\pi$.

(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (y - xy) ds$.

(c) Trovare un potenziale del campo $\mathbf{F} = (6x^2y e^{x^3y}, 10y + 2x^3 e^{x^3y})$ e calcolare l'integrale di F su γ .

4. (6 punti) Sia $f(x) = \pi^2 - 3x^2$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di \mathbb{R} .

(a) Calcolare la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza.

(b) Usando le informazioni del punto precedente, dire quanto vale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

5. (5 punti) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{z^2}{e^{\pi z} - i}$, e sia γ_R la circon-

ferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale di f su γ_R quando $R = 2$. Dire se esiste il limite dell'integrale per $R \rightarrow +\infty$.

6. (6 punti, da svolgere solo per Ing. Civ.-Amb.)

Sia $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3$ e sia Γ l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$.

(a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.

(b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq -\frac{1}{2}\}$.