UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria Civile-Ambientale

Prova scritta del 27.I.2017 — Compito n. 1

1. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cono avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 2 nel piano $z = 0$, e per vertice il punto $(0, 0, 1)$. Calcolare l'integrale
$$\iiint_C (1 + xy + z)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = \left(4xye^{x^2y} + axy\right)\mathbf{i} + \left(2x^2e^{x^2y} - x^2\right)\mathbf{j}\,,$$
dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.
   (a) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il campo è conservativo, e calcolarne un potenziale.
   (b) Per un a qualsiasi, dire quanto vale l'integrale di $\mathbf{F}$ sulla circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 2.

3. Studiare la convergenza delle serie seguenti:
$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n} - n^2}{\ln^2 n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}\,.$$

4. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 8}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z = -1$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R, quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R.

5. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) \ :\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 1\}$.

6. (a) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = y^2 + 2y$ con condizione iniziale $y(0) = -1$.
   (b) Si consideri l'equazione $y' = e^y(y^2 + 2y)$ e si dica per quali valori della condizione iniziale la corrispondente soluzione $y(x)$ è definita per tutti gli $x > 0$ e soddisfa $y(x) \to -2$ per $x \to \infty$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria Civile-Ambientale

Prova scritta del 27.I.2017 — Compito n. 2

1. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cono avente per base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 nel piano $z = 0$, e per vertice il punto $(0, 0, 2)$. Calcolare l'integrale
$$\iiint_C (2 + z - xy)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = \left(3y^2 e^{xy^2} + xy\right) \mathbf{i} + \left(6xye^{xy^2} - ax^2\right) \mathbf{j}\,,$$
dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.
   (a) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il campo è conservativo, e calcolarne un potenziale.
   (b) Per un a qualsiasi, dire quanto vale l'integrale di $\mathbf{F}$ sulla circonferenza di centro $(0, 2)$ e raggio 5.

3. Studiare la convergenza delle serie seguenti:
$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^4 - n}}{\ln n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}\,.$$

4. Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 8}$, e si indichi con γ_R la circonferenza con centro il punto $z = 1$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R, quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R.

5. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$.
   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.
   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 1\}$.

6. (a) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = y^2 - 2y$ con condizione iniziale $y(0) = 1$.
   (b) Si consideri l'equazione $y' = e^y(y^2 - 2y)$ e si dica per quali valori della condizione iniziale la corrispondente soluzione $y(x)$ è definita per tutti gli $x > 0$ e soddisfa $y(x) \to 0$ per $x \to \infty$.