UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 25.I.2019 — Compito n. 1

1. Trovare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, i punti critici della funzione $f(x,y) = y(2y - x^2 - a)$ e dire se sono di max/min locale.

2. Sia $f(x,y) = 2y + y^2 + 6x^2$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - y = 0$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 - y \le 0, \ y \le 1/2\}$.

3. Sia Ω la porzione del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 2 che si trova nel quadrante con $x \ge 0, y \ge 0$. Calcolare
$$\int\int_\Omega (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

4. Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:
$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(2y^3 e^{xy^3} + \alpha y^2 \ , \ 6xy(ye^{xy^3} - 1) \Big).$$
   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.
   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^6 + t^2 - 1, \, t^3 \,)$, $t \in [0,1]$.
   (c) Mostrare che, se ζ è una qualunque circonferenza avente centro sull'asse x, allora l'integrale di $\mathbf{F}$ su ζ è nullo, indipendentemente dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (solo per Ing. Medica) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche
$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = ((4-2v)\cos u, (4-2v)\sin u, v) \qquad (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0,2].$$
   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.
   (b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo
$$\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} + (z^2 + 2)\,\mathbf{k}.$$
   (c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è la superficie laterale di un cono)

6. (solo per Ing. Civ. Amb.) Si consideri l'equazione differenziale $y'' - 2y' = 16 \operatorname{sen} 2x$
   (a) Trovare la soluzione $y(x)$ che soddisfa $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
   (b) Determinare se esiste, e se è unica, una soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e tale che $y(x)$ sia limitata per $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 25.I.2019 — Compito n. 2

1. Trovare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, i punti critici della funzione $f(x,y) = 2y(x^2-y-a)$ e dire se sono di max/min locale.

2. Sia $f(x,y) = 3x + x^2 + 6y^2$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x = 0$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2+y^2-x \le 0, \ x \le 1/2\}$.

3. Sia Ω la porzione del cerchio di centro $(\sqrt{2}, 0)$ e raggio 2 che si trova nel quadrante con $x \ge 0, y \ge 0$. Calcolare
$$\int\int_\Omega (x^2+y^2-2)\,dxdy.$$

4. Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:
$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(6xye^{x^2y} + \alpha y^2 \ , \ 3x(xe^{x^2y} - y) \Big) .$$
   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.
   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^6 + t^2 - 1, \, t^3 \,)$, $t \in [0,1]$.
   (c) Mostrare che, se ζ è una qualunque circonferenza avente centro sull'asse x, allora l'integrale di $\mathbf{F}$ su ζ è nullo, indipendentemente dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (solo per Ing. Medica) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche
$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = \left(\left(2 - \frac{v}{2}\right) \cos u, \left(2 - \frac{v}{2}\right) \sin u, v \right) \qquad (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0,4].$$
   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.
   (b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo
$$\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} + (z^2-2)\,\mathbf{k}.$$
   (c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è la superficie laterale di un cono)

6. (solo per Ing. Civ. Amb.) Si consideri l'equazione differenziale $y'' - 2y' = 4\cos 2x$
   (a) Trovare la soluzione $y(x)$ che soddisfa $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (b) Determinare se esiste, e se è unica, una soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e tale che $y(x)$ sia limitata per $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 25.I.2019 — Compito n. 3

1. Trovare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, i punti critici della funzione $f(x,y) = x(2x-y^2-a)$ e dire se sono di max/min locale.

2. Sia $f(x,y) = 2y - y^2 - 6x^2$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + y = 0$.

   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \;:\; x^2 + y^2 + y \le 0,\; y \ge -1/2\}$.

3. Sia Ω la porzione del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 2 che si trova nel quadrante con $x \ge 0, y \ge 0$. Calcolare
$$\int\!\!\int_\Omega (x^2 + y^2 - 1)\, dxdy.$$

4. Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:
$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(y(y^2 e^{xy^3} - x)\;,\; 3xy^2 e^{xy^3} + \alpha x^2 \Big).$$

   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\,t^2\,,\, t^8 + t^3 - 1\,)$, $t \in [0,1]$.

   (c) Mostrare che, se ζ è una qualunque circonferenza avente centro sull'asse y, allora l'integrale di $\mathbf{F}$ su ζ è nullo, indipendentemente dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (solo per Ing. Medica) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche
$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = ((4-2v)\cos u, (4-2v)\sin u, v) \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2].$$

   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $(1, \sqrt{3}, 1)$.

   (b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo
$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + 4yz\,\mathbf{j} + (z^2 + 2)\,\mathbf{k}.$$

   (c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è la superficie laterale di un cono)

6. (solo per Ing. Civ. Amb.) Si consideri l'equazione differenziale $y'' - 2y' = 4\,\mathrm{sen}\,2x$

   (a) Trovare la soluzione $y(x)$ che soddisfa $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   (b) Determinare se esiste, e se è unica, una soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e tale che $y(x)$ sia limitata per $x \in \mathbb{R}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 25.I.2019 — Compito n. 4

1. Trovare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, i punti critici della funzione $f(x, y) = 2x(y^2 - x - a)$ e dire se sono di max/min locale.

2. Sia $f(x, y) = 3x - x^2 - 6y^2$ e sia Γ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + x = 0$.

   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 + x \leq 0, \ x \geq -1/2\}$.

3. Sia Ω la porzione del cerchio di centro $(0, \sqrt{2})$ e raggio 2 che si trova nel quadrante con $x \geq 0, y \geq 0$. Calcolare
$$\int\int_\Omega (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

4. Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:
$$\mathbf{F}(x, y) = \Big(6x(ye^{x^2y} - y) \ , \ 3x^2 e^{x^2 y} + \alpha x^2 \Big) .$$

   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^2 \, , \, t^8 + t^3 - 1 \,)$, $t \in [0, 1]$.

   (c) Mostrare che, se ζ è una qualunque circonferenza avente centro sull'asse y, allora l'integrale di $\mathbf{F}$ su ζ è nullo, indipendentemente dal valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (solo per Ing. Medica) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche
$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = \Big(\Big(2 - \frac{v}{2}\Big) \cos u, \Big(2 - \frac{v}{2}\Big) \sin u, v \Big) \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 4].$$

   (a) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ nel punto $\Big(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\Big)$.

   (b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo
$$\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} \, + 4yz\,\mathbf{j} + (z^2 - 2)\,\mathbf{k}.$$

   (c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è la superficie laterale di un cono)

6. (solo per Ing. Civ. Amb.) Si consideri l'equazione differenziale $y'' - 2y' = 16 \cos 2x$

   (a) Trovare la soluzione $y(x)$ che soddisfa $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

   (b) Determinare se esiste, e se è unica, una soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e tale che $y(x)$ sia limitata per $x \in \mathbb{R}$.