UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 1

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = (x - 1)(x^2 + y^2 - a)$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq -x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = 2y^2$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(1 + x \sin x^2)\mathbf{i} - y(\alpha x + \cos x^2)\mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ .

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione).

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n^2 + 1} - n \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tan \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = -10e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 2

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = y[x^2 + (y - 1)^2 - a]$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = x^2 - 1$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(1 + xe^{x^2})\mathbf{i} + y(\alpha x + e^{x^2})\mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ .

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = \frac{y}{3}\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione).

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{6n}} - \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = -10e^{-2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 3

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = x[(x-1)^2 + y^2 - a]$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \geq x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = y^2$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = y^2(\alpha + x \sin x^2) \mathbf{i} - y(x + \cos x^2) \mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ .

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = 2y \mathbf{i} - x \mathbf{j} + \sqrt{2}z \mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione).

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{(2n)!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[n - \sqrt{n^2 - 1} \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$$

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, utilizzando la trasformata di Laplace.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 24.I.2020 — Compito n. 4

1. (7 punti) Sia $f(x, y) = (1 - y)(x^2 + y^2 - a)$, con a un parametro reale positivo. Al variare di $a > 0$, determinare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale.

2. (7 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq -x\}$.

(a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = 1 - x^2$.

(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. (5 punti) Si consideri il campo $\mathbf{F} = xy(1 + ye^{x^2}) \mathbf{i} + (\alpha x^2 + ye^{x^2}) \mathbf{j}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

(b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

4. (6 punti) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazioni parametriche

$$\sigma(u, v) = (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \quad (u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi].$$

(a) Calcolare l'area di Σ .

(b) Calcolare, usando la definizione, il flusso del campo $\mathbf{F} = \frac{2y}{9} \mathbf{i} - \frac{x}{3} \mathbf{j} + \frac{z}{3} \mathbf{k}$ (rispetto alla normale indotta dalla parametrizzazione).

(c) Calcolare lo stesso flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza. (sugg. osservare che Σ è una porzione di superficie sferica)

5. (solo per Ing. Medica, 5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\sqrt{n^2 + 1} - n \right] \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{2n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

6. (solo per Ing. Civile e Ambientale, 5 punti) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = 10e^{-2x}$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, utilizzando la trasformata di Laplace.