UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 21.II.2018 — Compito n.

1. (a) Data $f(x,y) = 1 + x^4(2-y) + y^2$, trovare i punti di max/min locale liberi di f su $\mathbb{R}^2$.
   (b) Trovare i punti di max/min assoluti di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ 2x^4 + y^2 \le 48\}$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la parte del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 che si trova al di sopra della retta $y = x$. Calcolare
$$\iint_\Omega \big(x^2 - y^2 - 1\big)\, dx\, dy.$$

3. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = y^2 \Big[(1+2x^2)e^{x^2} + a \Big]\, \mathbf{i} + 2xy(e^{x^2}+1)\, \mathbf{j}\ , \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$
   (a) Dire per quali valori di a il campo è conservativo.
   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sulla curva
$$\gamma(t) = \big(\, t^9 - 2t^5 + 1\,,\, 2(t-1)\cos t\,\big)\,, \qquad t \in [0,1].$$
   (c) Per un valore di a generico, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sul segmento che ha gli stessi estremi di γ.

4. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha > 0$:
$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^4 + n^\alpha} - n^2\right) \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\, \alpha^n}{(2n)!}\,.$$

5. (solo per Ing. Medica) Si consideri la superficie Σ di equazione parametrica
$$\mathbf{r}(u,v) = (\, 2u\cos v\,,\, 2u \operatorname{sen} v\,,\, v - \pi\,), \qquad u \in [-1,1],\ v \in [0, 2\pi].$$
   (a) Dire se la superficie è regolare, e trovare il piano tangente in $(0,0,0)$.
   (b) Calcolare l'integrale su Σ di $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo
$$\mathbf{G} = (z+\pi)\,\mathbf{i} + \cos z\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k}.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Calcolare l'integrale della funzione complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{z^6+1}$ sulla circonferenza di centro i e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale della funzione $g(z) = f(z) + \dfrac{1}{z^2}$ sulla stessa curva.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 21.II.2018 — Compito n.

1. (a) Data $f(x,y) = (x-2)y^4 - x^2$, trovare i punti di max/min locale liberi di f su $\mathbb{R}^2$.
   (b) Trovare i punti di max/min assoluti di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ x^2 + 2y^4 \leq 48\}$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la parte del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 che si trova al di sotto della retta $y = x$. Calcolare
$$\iint_\Omega (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

3. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = y^2 \left[2 + (1-2x^2)e^{-x^2} \right] \mathbf{i} + 2xy \left(e^{-x^2} + a \right) \mathbf{j}\,, \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$
   (a) Dire per quali valori di a il campo è conservativo.
   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sulla curva
$$\gamma(t) = \big(2(t-1)\cos t\,,\ t^9 - 2t^5 + 1 \big)\,, \qquad t \in [0,1].$$
   (c) Per un valore di a generico, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sul segmento che ha gli stessi estremi di γ.

4. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha > 0$:
$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^2} \right)^{\alpha} \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{4n^6 + n^\alpha} - 2n^3 \right) \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n\,(2\alpha)^n}\,.$$

5. (solo per Ing. Medica) Si consideri la superficie Σ di equazione parametrica
$$\mathbf{r}(u,v) = (\, u\cos v\,,\ u \operatorname{sen} v\,,\ v\,), \qquad u \in [-1,1],\ v \in [-\pi,\pi].$$
   (a) Dire se la superficie è regolare, e trovare il piano tangente in $(0,0,0)$.
   (b) Calcolare l'integrale su Σ di $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo
$$\mathbf{G} = \operatorname{sen} z\, \mathbf{i} + z\, \mathbf{j} + 2y^2\, \mathbf{k}.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Calcolare l'integrale della funzione complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{z^6+1}$ sulla circonferenza di centro $-i$ e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale della funzione $g(z) = f(z) + \dfrac{1}{z^2}$ sulla stessa curva.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 21.II.2018 — Compito n.

1. (a) Data $f(x,y) = x^4(y+2) + y^2$, trovare i punti di max/min locale liberi di f su $\mathbb{R}^2$.
   (b) Trovare i punti di max/min assoluti di f su $\Gamma = \{(x,y) \ : \ 2x^4 + y^2 \leq 3\}$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la parte del cerchio di centro $(-1,0)$ e raggio 1 che si trova al di sopra della retta $y = x$. Calcolare
$$\iint_\Omega 3(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

3. Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F} = 2xy\left(e^{y^2}+1\right)\mathbf{i} + x^2\left[\,a + (2y^2+1)e^{y^2}\,\right]\mathbf{j}\,, \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$
   (a) Dire per quali valori di a il campo è conservativo.
   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sulla curva
$$\gamma(t) = \left(\,t^9 - 2t^5 + 1\,,\, 2(t-1)\cos t\,\right), \qquad t \in [0,1].$$
   (c) Per un valore di a generico, calcolare l'integrale di $\mathbf{F}$ sul segmento che ha gli stessi estremi di γ.

4. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha > 0$:
$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^\alpha} - \operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha}} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(n^3 - \sqrt{n^6 - n^\alpha}\right) \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha n)^n}\,.$$

5. (solo per Ing. Medica) Si consideri la superficie Σ di equazione parametrica
$$\mathbf{r}(u,v) = (\,u\cos v\,,\, u\operatorname{sen} v\,,\, v\,), \qquad u \in [-1,1],\ v \in [0,2\pi].$$
   (a) Dire se la superficie è regolare, e trovare il piano tangente in $(0,0,0)$.
   (b) Calcolare l'integrale su Σ di $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo
$$\mathbf{G} = \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + 2x^2\,\mathbf{k}.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Calcolare l'integrale della funzione complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{z^6+1}$ sulla circonferenza di centro i e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale della funzione $g(z) = f(z) + \dfrac{1}{z^2}$ sulla stessa curva.