UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria Medica, Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta del 20.VI.2019 — Compito n. 1

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,0)$

$$f(x,y) = x^4 + (x+y-1)^2, \qquad g(x,y) = \frac{x}{y+1} - \operatorname{sen} x, \qquad h(x,y) = \cos x^3 - \operatorname{sen}(x^2y^2).$$

2. (6 punti) Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x$ e sia Γ la curva piana di equazione $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$.

   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + \frac{y^2}{5} \le 1, \ x \ge 0\}$.

3. (6 punti) Determinare le coordinate del baricentro dell'insieme piano $\Omega = T \cup S$, dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,1)$ e $(4,0)$, mentre S è il semicerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \le 0$.

4. (6 punti) Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(2y^2 e^{xy^2} + \alpha y \ , \ 4xye^{xy^2} - y^2\right).$$

   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^4 - 1, \ \operatorname{sen}(\pi t^4) + t\,)$, con $t \in [0,1]$.

   (c) Mostrare che, per i valori di α diversi da quelli del punto (a), l'integrale di $\mathbf{F}$ su una qualunque curva chiusa semplice è diverso da zero.

5. (7 punti, solo per Ing. Medica)

   (a) Sia Ω la parte della sfera (piena) di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$. Calcolare
$$\int\!\!\int\!\!\int_\Omega (1+x^2)\, dx\, dy\, dz$$

   (b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$, orientata con normale rivolta verso l'alto.
$$\mathbf{F} = (1+yz)\,\mathbf{i} + (y-x)\,\mathbf{j} + x^2 z\,\mathbf{k}.$$
   Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ e il flusso di **rot F** attraverso Σ. (sugg. utilizzare i teoremi della divergenza e di Stokes e il risultato del punto precedente).

6. (7 punti, solo per Ing. Civile e Ambientale)

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale
$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{3x}$$
   che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

   (b) Mostrare che, qualunque siano le condizioni iniziali, tutte le soluzioni dell'equazione in (a) soddisfano $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

   (c) In generale, dire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione $y'' + ky' + 5y = 10e^{3x}$ soddisfano $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria Medica, Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta del 20.VI.2019 — Compito n. 2

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,0)$

$$f(x,y) = x^4 + (x+y-1)^2, \qquad g(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y^2) - \cos x^3, \qquad h(x,y) = \operatorname{sen} y - \frac{y}{x+1}.$$

2. (6 punti) Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x$ e sia Γ la curva piana di equazione $x^2 + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + \dfrac{y^2}{5} \leq 1, \ x \leq 0\}$.

3. (6 punti) Determinare le coordinate del baricentro dell'insieme piano $\Omega = T \cup S$, dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,1)$ e $(4,0)$, mentre S è il semicerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2 contenuto nel semipiano $y \leq 0$.

4. (6 punti) Si consideri il seguente campo vettoriale, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro:

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(3y^2 e^{xy^2} + \alpha y \ , \ 6xye^{xy^2} - 3y^2 \right).$$

   (a) Dire per quali valori di α il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$.

   (b) Per un valore di α generale, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\,t^4 - 1, \ \operatorname{sen}(\pi t^4) + t\,)$, con $t \in [0,1]$.

   (c) Mostrare che, per i valori di α diversi da quelli del punto (a), l'integrale di $\mathbf{F}$ su una qualunque curva chiusa semplice è diverso da zero.

5. (7 punti, solo per Ing. Medica)

   (a) Sia Ω la parte della sfera (piena) di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$. Calcolare

$$\iiint_\Omega (1 + x^2)\, dx\, dy\, dz$$

   (b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$, orientata con normale rivolta verso l'alto.

$$\mathbf{F} = (1 + yz)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j} + x^2 z\,\mathbf{k}.$$

   Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ e il flusso di **rot F** attraverso Σ. (sugg. utilizzare i teoremi della divergenza e di Stokes e il risultato del punto precedente).

6. (7 punti, solo per Ing. Civile e Ambientale)

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 5y = 10e^{3x}$$

   che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

   (b) Mostrare che, qualunque siano le condizioni iniziali, tutte le soluzioni dell'equazione in (a) soddisfano $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

   (c) In generale, dire per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione $y'' + ky' + 5y = 10e^{3x}$ soddisfano $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.