UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2020 — Compito n. 1

1. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4(2y+1) - 1 + 2y^2$ e determinare quali di essi sono di massimo o di minimo locale.

2. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\,2y - x\sqrt{1+x^2+y^4}\,)\,\mathbf{i} + \,(\,ax - 2y^3\sqrt{1+x^2+y^4}\,)\,\mathbf{j},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (te^{t^2-4}, t^2 - 3t + 2)$, $t \in [0,2]$.

   (c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

3. (a) Sia Ω la parte della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + 3z^2$.

   (b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$, orientata secondo la normale che punta verso l'esterno della sfera. Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = (1 - 2xy^2)\,\mathbf{i} \,+ x^3(y + z^2)\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}.$$

   (sugg. utilizzare il teorema della divergenza e il risultato del punto (a)).

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2020 — Compito n. 2

1. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^2 + (2x+1)y^4 - 1$ e determinare quali di essi sono di massimo o di minimo locale.

2. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\, x\sqrt{1+2x^2+y^4} - y\,)\,\mathbf{i} + \,(\, y^3\sqrt{1+2x^2+y^4} + ax\,)\,\mathbf{j},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^2 - 3t + 2, te^{t^2-4})$, $t \in [0,2]$.

   (c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

3. (a) Sia Ω la parte della sfera di centro $(0,0,-1)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 0$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x,y,z) = 4y^2 - x^3 + 2z$.

   (b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,-1)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 0$, orientata secondo la normale che punta verso l'esterno della sfera. Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = (1 + 4xy^2)\,\mathbf{i} \, + x^3(z^2 - y)\,\mathbf{j} + (z^2 + 2)\,\mathbf{k}.$$

   (sugg. utilizzare il teorema della divergenza e il risultato del punto (a)).

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2020 — Compito n. 3

1. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 1 - 2x^2 + (2x-1)y^4$ e determinare quali di essi sono di massimo o di minimo locale.

2. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\,ay - 2x^3\sqrt{1+x^4+y^2}\,)\,\mathbf{i} + \,(\,2x - y\sqrt{1+x^4+y^2}\,)\,\mathbf{j},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (te^{t^2-4}, t^2-3t+2)$, $t \in [0,2]$.

(c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

3. (a) Sia Ω la parte della sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z=1$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + 3z^2$.

(b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z=1$, orientata secondo la normale che punta verso l'esterno della sfera. Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = (1-2xy^2)\,\mathbf{i}\, + x^3(y+z^2)\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}.$$

(sugg. utilizzare il teorema della divergenza e il risultato del punto (a)).

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2020 — Compito n. 4

1. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4(2y-1) - 2y^2 + 1$ e determinare quali di essi sono di massimo o di minimo locale.

2. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\,4x^3\sqrt{1+x^4+2y^2} + ay\,)\,\mathbf{i} + \,(\,4y\sqrt{1+x^4+2y^2} - x\,)\,\mathbf{j},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (a) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

   (b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^2 - 3t + 2, te^{t^2-4})$, $t \in [0,2]$.

   (c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F}\cdot\mathbf{dx}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ.

3. (a) Sia Ω la parte della sfera di centro $(0,0,-1)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 0$. Calcolare l'integrale triplo su Ω della funzione $f(x,y,z) = 4y^2 - x^3 + 2z$.

   (b) Sia Σ la parte della superficie sferica di centro $(0,0,-1)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 0$, orientata secondo la normale che punta verso l'esterno della sfera. Calcolare il flusso attraverso Σ del campo

$$\mathbf{F} = (1+4xy^2)\,\mathbf{i} + x^3(z^2-y)\,\mathbf{j} + (z^2+2)\,\mathbf{k}.$$

   (sugg. utilizzare il teorema della divergenza e il risultato del punto (a)).