UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2018 — Compito n. 1

1. Sia $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - y$ e sia Γ la curva di equazione $8x^2 + y^2 = 9$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ 8x^2 + y^2 \leq 9, \ y \leq -1\}$.

2. Sia T il trapezio di vertici $(0,0)$, $(2,1)$, $(4,1)$ e $(6,0)$ e sia S il semicerchio di centro $(3,0)$ e raggio 3 nel semipiano $y \leq 0$. Calcolare le coordinate del baricentro di $T \cup S$.

3. (solo per Ing. Medica) Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2 e^{xy} + \frac{2ay}{x^2+y^2} \ , \ e^{2y} + (1+xy)e^{xy} - \frac{2ax}{x^2+y^2} \right),$$
   dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.
   (a) Nel caso $a = 0$, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\gamma(t) = (t^3 - 2t, (1-t)e^{t^2})$, con $t \in [0,1]$.
   (b) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.
   (c) Per a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\zeta(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia Σ il tronco di cono di equazione
$$\mathbf{r}(u,v) = (\,(4-v)\cos u\,,\,(4-v)\operatorname{sen} u\,,\,v\,), \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,1].$$
   (a) Dire se Σ è una superficie regolare.
   (b) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo $\mathbf{F} = (\,x+1\,,\,y+1\,,\,z\,)$ usando la definizione.
   (c) Calcolare il flusso del punto precedente utilizzando il teorema della divergenza.

5. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n}{1+n+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su tutto il dominio.
   (b) Per $a > 0$, studiare la convergenza uniforme di f_n sui sottoinsiemi del tipo $[-a,a]$ e su quelli del tipo $[a,+\infty)$.

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{4z^4+1}$.
   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = -i$ e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario.
   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^4+1}\,dx$.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 18.VI.2018 — Compito n. 2

1. Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$ e sia Γ la curva di equazione $2x^2 + y^2 = 9$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ 2x^2 + y^2 \le 9, \ y \ge 1\}$.

2. Sia T il trapezio di vertici $(0,0)$, $(1,2)$, $(3,2)$ e $(4,0)$ e sia S il semicerchio di centro $(2,0)$ e raggio 2 nel semipiano $y \le 0$. Calcolare le coordinate del baricentro di $T \cup S$.

3. (solo per Ing. Medica) Si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{2x} - y^2 e^{xy} + \frac{3ay}{x^2+y^2} \ , \ y - (xy+1)e^{xy} - \frac{3ax}{x^2+y^2} \right),$$
   dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.
   (a) Nel caso $a = 0$, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\gamma(t) = (t^3 - 2t, (1-t)e^{t^2})$, con $t \in [0,1]$.
   (b) Dire per quali valori di a il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.
   (c) Per a qualunque, calcolare $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove $\zeta(t) = (1 + 2\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

4. Sia Σ il tronco di cono di equazione
$$\mathbf{r}(u,v) = (\,(3-v)\cos u\,,\,(3-v)\operatorname{sen} u\,,\,v\,)\,, \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2].$$
   (a) Dire se Σ è una superficie regolare.
   (b) Calcolare il flusso attraverso Σ del campo $\mathbf{F} = (\,x\,,\,y\,,\,1-z\,)$ usando la definizione.
   (c) Calcolare il flusso del punto precedente utilizzando il teorema della divergenza.

5. Si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) = \frac{n}{2n - 1 + n^2 x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n su tutto il dominio.
   (b) Per $a > 0$, studiare la convergenza uniforme di f_n sui sottoinsiemi del tipo $[-a,a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$.

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi i z}}{4z^4+1}$.
   (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = -i$ e raggio $3/2$ percorsa in senso antiorario.
   (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^4+1}\,dx$.